

Feuille 3

Exercice 1. Résoudre les programmes linéaires suivants en utilisant l'algorithme du simplexe :

$$(\mathcal{P}_1) \begin{cases} \text{Max } 3x_1 + 4x_2 \\ x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ x_1 + x_2 \leq 6 \\ 4x_1 + x_2 \leq 10 \\ x_i \geq 0, \text{ pour tout } i \end{cases} ; (\mathcal{P}_2) \begin{cases} \text{Max } x_1 + x_2 - 3x_3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 6 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ x_i \geq 0, \text{ pour tout } i \end{cases}$$

$$(\mathcal{P}_3) \begin{cases} \text{Max } x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 \\ 2x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 4 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 \leq 6 \\ x_i \geq 0, \text{ pour tout } i \end{cases} ; (\mathcal{P}_4) \begin{cases} \text{Max } 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 4 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 \leq 6 \\ x_i \geq 0, \text{ pour tout } i \end{cases}$$

Enoncer les programmes duaux ; les résoudre.

Exercice 2. Résoudre les programmes linéaires suivants en utilisant l'algorithme du simplexe :

$$(\mathcal{P}_5) \begin{cases} \text{Max } x_1 + x_2 - x_6 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 + x_6 = 1 \\ x_i \geq 0, \text{ pour tout } i \end{cases} ; (\mathcal{P}_6) \begin{cases} \text{Max } 4x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 + x_6 \leq 1 \\ 5x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \leq 1 \\ x_i \geq 0, \text{ pour tout } i \end{cases}$$

Exercice 3. Résoudre les programmes linéaires suivants en utilisant l'algorithme du simplexe :

$$(\mathcal{P}_7) \begin{cases} \text{Max } 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 6 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 8 \\ 4x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 = 10 \\ x_i \geq 0, \text{ pour tout } i \end{cases} ; (\mathcal{P}_8) \begin{cases} \text{Max } x_1 + x_2 - 3x_3 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 3 \\ x_1 + x_3 + 2x_4 = 5 \\ 4x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 7 \\ x_i \geq 0, \text{ pour tout } i \end{cases}$$

Exercice 4. Soient b, a_1, \dots, a_k des éléments de \mathbb{R}^n . Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- b appartient au cône engendré par les vecteurs a_i ;
- L'intersection des k demi-espaces définis par $\{x : \langle a_i, x \rangle \leq 0\}$ est incluse dans le demi-espace associé à b par $\{x : \langle b, x \rangle \leq 0\}$.

Exercice 5. Déterminer tous les extrema locaux et absolus ainsi que les points selle de la fonction $f(x, y) = x^2y^2 - 2x^2 - y^2$.

Exercice 6. Déterminer tous les extrema locaux et absolus ainsi que les points selle de la fonction $f(x, y) = xy(1 - x^2 - y^2)$ sur le carré $\{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.

Exercice 7. Considérer la fonction $f(x, y) = x^3 - 3x^2 + y^2$.

- Déterminer les points critiques de f ainsi que leur nature.
- Trouver les extrema de f sur le carré $\{(x, y) \mid 0 \leq x, y \leq 2\}$.

Exercice 8. Trouver le ou les points critiques de la fonction définie par $f(x, y, z) = x^2 - 2yz - 2x + 1$. La fonction f a-t-elle des extrema en ce ou ces points critiques ?

Exercice 9. Étudier la nature des points critiques de la fonction définie sur \mathbb{R}^3 par $f(x, y, z) = x^3z + x^2y^2 - x^2 - y^2 - 4xz$.

Exercice 10. Soit A une matrice réelle symétrique de taille 4×4 . On appelle mineurs principaux de A les déterminants des matrices 1×1 , 2×2 , 3×3 , 4×4 successives obtenues en ne gardant que le coefficient en haut à gauche, puis les quatre en haut à gauche, les neuf, les seize. Montrer que si tous les mineurs principaux sont strictement positifs alors A est définie positive.

Exercice 11. On considère une série $(x_i, y_i, z_i)_{i=1}^n$. On cherche à déterminer un plan qui approche au mieux le nuage de points de l'espace correspondant. Une possibilité est de rechercher les coefficients a , b et c tels que la quantité

$$F(a, b, c) = \sum_{i=1}^n (z_i - ax_i - by_i - c)^2$$

soit minimale.

1. Déterminer les points critiques de F ainsi que leur nature.
2. Pourquoi la fonction F a-t-elle un minimum global au point critique identifié ?

Exercice 12. Sur une collection d'individus on observe des variables y_i et des variables explicatives (ou régresseurs) x_i , $i = 1, \dots, n$, chaque paire (y_i, x_i) représentant une expérience. On les arrange dans un tableau de la façon suivante :

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_{12} & \dots & x_{1p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n2} & \dots & x_{np} \end{pmatrix}.$$

x_i est donc un vecteur ligne. On notera $x_{.j}$ la j -ième colonne. On convient généralement que le premier régresseur est la constante, mais ça n'est pas obligatoire. Pour tout vecteur β , on définit l'erreur quadratique moyenne d'ajustement (ou erreur résiduelle) $S(\beta)$ comme

$$S(\beta)^2 = \frac{1}{n} \|y - X\beta\|^2 = \frac{1}{n} \sum_i (y_i - x_i\beta)^2.$$

Le vecteur des coefficients de regression calculé aux moindres carrés ordinaires est

$$\hat{\beta} = \arg \min_{\beta} S(\beta)$$

Montrer que si on suppose la matrice tXX inversible. Alors $\hat{\beta}$ est donné par $\hat{\beta} = ({}^tXX)^{-1} \cdot {}^tXy$.

- Exercice 13.**
1. La fonction $f(x, y, z) = 2xyz$ est-elle continue ?
 2. Trouver les points critiques de f . Ces points critiques sont-ils des extremums locaux ?
 3. La restriction de cette fonction à l'ensemble $\{(x, y, z) / x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ est-elle bornée et atteint-elle ses bornes ? Pourquoi ?