Feuille 3

Exercice 1. Résoudre les programmes linéaires suivants en utilisant l'algorithme du simplexe :

$$(\mathcal{P}_1)\begin{cases} Max\ 3x_1+4x_2 \\ x_1+2x_2\leq 6 \\ x_1+x_2\leq 6 \\ 4x_1+x_2\leq 10 \\ x_i\geq 0,\ \text{pour tout } i \end{cases} ;(\mathcal{P}_2)\begin{cases} Max\ x_1+x_2-3x_3 \\ x_1+2x_2+x_3\leq 10 \\ x_1+x_2+3x_3\leq 6 \\ 4x_1+2x_2\leq 8 \\ x_i\geq 0,\ \text{pour tout } i \end{cases}$$

$$(\mathcal{P}_3)\begin{cases} Max\ x_1+x_2+3x_3+x_4 \\ 2x_2+x_3+3x_4\leq 4 \\ 2x_1+4x_2+x_3+x_4\leq 6 \\ x_i\geq 0,\ \text{pour tout } i \end{cases} ;(\mathcal{P}_4)\begin{cases} Max\ 2x_1+4x_2+3x_3+2x_4 \\ 2x_1+x_2+x_3+2x_4\leq 4 \\ 2x_1+4x_2+x_3+x_4\leq 6 \\ x_i\geq 0,\ \text{pour tout } i \end{cases}$$

Exercice 2. Résoudre les programmes linéaires suivants en utilisant l'algorithme du simplexe :

$$(\mathcal{P}_5)\begin{cases} Max\ x_1+x_2-x_6 \\ x_1+2x_2+x_3+3x_4+x_5+x_6=1 \\ x_i\geq 0,\ \text{pour tout } i \end{cases} ;(\mathcal{P}_6)\begin{cases} Max\ 4x_1+x_2+2x_3+x_4+x_5+x_6 \\ x_1+2x_2+x_3+3x_4+x_5+x_6\leq 1 \\ 5x_1+4x_2+x_3+x_4+x_5+x_6\leq 1 \\ x_i\geq 0,\ \text{pour tout } i \end{cases}$$

Exercice 3. Résoudre les programmes linéaires suivants en utilisant l'algorithme du simplexe :

$$(\mathcal{P}_7)\begin{cases} Max\ 3x_1+4x_2+x_3+2x_4 \\ x_1+2x_2+x_3+x_4=6 \\ x_1+x_2+x_3+2x_4=8 \\ 4x_1+x_2+x_3+5x_4=10 \\ x_i\geq 0,\ \text{pour tout } i \end{cases} ;(\mathcal{P}_8)\begin{cases} Max\ x_1+x_2-3x_3 \\ x_1+2x_2+x_4=3 \\ x_1+x_3+2x_4=5 \\ 4x_1+x_2+x_3+2x_4=7 \\ x_i\geq 0,\ \text{pour tout } i \end{cases}$$

Exercice 4. Soient $b, a_1, \dots, a_k$ des éléments de $\mathbb{R}^n$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(a) b appartient au cône engendré par les vecteurs a_i ;

(b) L'intersection des k demi-espaces définis par $\{x : \langle a_i, x\rangle \leq 0\}$ est incluse dans le demi-espace associé à b par $\{x : \langle b, x\rangle \leq 0\}$.

Exercice 5. Déterminer tous les extrema locaux et absolus ainsi que les points selle de la fonction $f(x,y) = x^2y^2 - 2x^2 - y^2$.

Exercice 6. Déterminer tous les extrema locaux et absolus ainsi que les points selle de la fonction $f(x,y) = xy(1-x^2-y^2)$ sur le carré $\{(x,y)\,|\,0 \leqslant x \leqslant 1\ ,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\}$.

Exercice 7. Considérer la fonction $f(x,y) = x^3 - 3x^2 + y^2$.

1. Déterminer les points critiques de f ainsi que leur nature.
2. Trouver les extrema de f sur le carré $\{(x,y) \mid 0 \leqslant x, y \leqslant 2\}$.

Exercice 8. Trouver le ou les points critiques de la fonction définie par $f(x,y,z) = x^2 - 2yz - 2x + 1$. La fonction f a-t-elle des extrema en ce ou ces points critiques ?

Exercice 9. Étudier la nature des points critiques de la fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ par $f(x,y,z) = x^3z + x^2y^2 - x^2 - y^2 - 4xz$.

Exercice 10. Soit A une matrice réelle symétrique de taille 4×4. On appelle mineurs principaux de A les déterminants des matrices 1×1, 2×2, 3×3, 4×4 successives obtenues en ne gardant que le coefficient en haut à gauche, puis les quatre en haut à gauche, les neuf, les seize. Montrer que si tous les mineurs principaux sont strictement positifs alors A est définie positive.

Exercice 11. On considère une série $(x_i, y_i, z_i)_{i=1}^n$. On cherche à déterminer un plan qui approche au mieux le nuage de points de l'espace correspondant. Une possibilité est de rechercher les coefficients a, b et c tels que la quantité

$$F(a,b,c) = \sum_{i=1}^{n} (z_i - ax_i - by_i - c)^2$$

soit minimale.

1. Déterminer les points critiques de F ainsi que leur nature.
2. Pourquoi la fonction F a-t-elle un minimum global au point critique identifié ?

Exercice 12. Sur une collection d'individus on observe des variables y_i et des variables explicatives (ou régresseurs) x_i, $i = 1, ...n$, chaque paire (y_i, x_i) représentant une expérience. On les arrange dans un tableau de la façon suivante :

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_{12} & \dots & x_{1p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n2} & \dots & x_{np} \end{pmatrix}.$$

x_i est donc un vecteur ligne. On notera $x_{.j}$ la j-ième colonne. On convient généralement que le premier régresseur est la constante, mais ça n'est pas obligatoire. Pour tout vecteur β, on définit l'erreur quadratique moyenne d'ajustement (ou erreur résiduelle) $S(\beta)$ comme

$$S(\beta)^2 = \frac{1}{n}\|y - X\beta\|^2 = \frac{1}{n}\sum_i (y_i - x_i\beta)^2.$$

Le vecteur des coefficients de regression calculé aux moindres carrés ordinaires est

$$\hat{\beta} = \arg\min_{\beta} S(\beta)$$

Montrer que si on suppose la matrice ${}^tXX$ inversible. Alors $\hat{\beta}$ est donné par $\hat{\beta} = ({}^tXX)^{-1}.{}^tXy$.

Exercice 13.

1. La fonction $f(x,y,z) = 2xyz$ est-elle continue ?
2. Trouver les points critiques de f. Ces points critiques sont-ils des extremums locaux ?
3. La restriction de cette fonction à l'ensemble $\{(x,y,z) \ / \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ est-elle bornée et atteint-elle ses bornes ? Pourquoi ?