Feuille 2

Exercice 1. Une usine fabrique deux produits P_1 et P_2 dont les prix de vente à l'unité sont 6 et 4. Pour ce faire elle a besoin de main d'œuvre, de machine et de matières premières. Pour fabriquer une unité de P_1 (resp. P_2) il faut 3 (resp. 9) unités de machine, 4 (resp. 5) unités de main d'œuvre, 2 (resp. 1) unités de matières premières. L'usine dispose de 81 unités de machine, 55 unités de main d'œuvre et 20 unités de matières premières. Écrire le problème d'optimisation sous contraintes correspondant à ces données. Le résoudre.

Exercice 2. On suppose que le noyau de A, une matrice, n'est pas nul. Montrer que l'ensemble des x tels que $Ax \leq b$ (où b est un vecteur fixe quelconque de taille correcte) est ou bien vide, ou bien une réunion de droites. Donner des exemples où cet ensemble est vide, est une droite, est une réunion d'une infinité de droites.

Exercice 3. Donner un exemple de matrices A et b telles que l'ensemble des x tels que $Ax \leq b$ soit une partie bornée d'intérieur non vide de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 4. Soit A une matrice $m \times n$ et $b \in \mathbb{R}^m$. On considère l'ensemble

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n \ / \ Ax = b, x \geq 0\}.$$

On suppose que C n'est pas vide.

1. Trouver une matrice B et un vecteur e tels que

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n \ / \ Bx \leq e\}.$$

2. Montrer que C ne contient pas de droite.
3. Montrer que si B' est de rang strictement inférieur à n alors $\{x \in \mathbb{R}^n \ / \ B'x \leq e\}$ contient une droite (dès qu'il n'est pas vide).
4. En déduire que B est forcément de rang n.

Exercice 5. Soient K un ensemble convexe fermé de $\mathbb{R}^n$.

1. Montrer que si K contient une droite alors il existe un vecteur c dans $\mathbb{R}^n$ tel que la fonction $x \mapsto \langle c, x\rangle$ ne soit ni minorée ni majorée sur K.
2. La réciproque est-elle vraie ?
3. Trouver un exemple de convexe C qui ne soit pas borné tel que pour tout c la fonction $x \mapsto \langle c, x\rangle$ est majorée ou minorée sur C.

Exercice 6. Soit $C := \{x \ / \ Ax \leq b, x \geq 0\}$ où A est une matrice $m \times n$. Posons

$$\tilde{C} := \{(x, u) \ / \ Ax + u = b, x \geq 0, u \geq 0\}.$$

Montrer l'équivalence entre :

(a) $\overline{x}$ est extrémal dans C ;

(b) $(\overline{x}, b - A\overline{x})$ est extrémal dans $\tilde{C}$.

Exercice 7. On considère une partie K convexe compacte du plan. On rapporte le plan à un système de coordonnées notées (x, y). Soient a et b deux nombres réels.

1. Montrer que la fonction $(x, y) \mapsto ax + by$ est bornée et atteint ses bornes sur K.
2. Soit (x_m, y_m) un point de K en lequel la fonction $(x, y) \mapsto ax+by$ est minimale sur K. Montrer que l'intersection de la droite d'équation $a(x - x_m) + b(y - y_m) = 0$ avec K est un segment (peut-être un point) dont les extrémités sont des points extrémaux de K.
3. En déduire une démonstration du fait que K est l'enveloppe convexe de l'ensemble de ses points extrémaux.

Exercice 8. Soient K un ensemble convexe fermé de $\mathbb{R}^n$ et x un point de $\mathbb{R}^n$ n'appartenant pas à K. Montrer qu'il existe un vecteur $v \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$ tels que

$$\forall z \in K,\ \langle v, z\rangle < \langle v, x\rangle - r.$$

Exercice 9. Soit C le polyèdre convexe fermé de $\mathbb{R}^2$ décrit à l'aide des inégalités suivantes

$$x_1 + \frac{8}{3}x_2 \leq 4,\ x_1 + x_2 \leq 2,\ 2x_1 \leq 3,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

Écrire C sous forme standard. Cela définit un convexe $\tilde{C}$. Quels sont les points extrémaux de $\tilde{C}$? En déduire les points extrémaux de C.

Exercice 10. Considérons le programme linéaire $(\mathcal{P})$ suivant

$$(\mathcal{P}) \left\{ \begin{array}{l} Max\langle c, x\rangle \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{array} \right. \quad \text{où } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Quel est le problème dual $(\mathcal{D})$ de $(\mathcal{P})$? Vérifier que $x = (3, 2, 0, 0, 1)$ et $y = (1, 2, 0)$ sont solutions de $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{D})$ respectivement.

Exercice 11. Soit C le polyèdre convexe compact de $\mathbb{R}^4$ décrit comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + \frac{4}{3}x_2 + 2x_3 = \frac{3}{2} \\ x_2 + 3x_3 = \frac{3}{2} \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ \forall i, x_i \geq 0 \end{array} \right.$$

1. Faire la liste des points extrémaux de C.
2. Résoudre

   $$(\mathcal{P}) \left\{ \begin{array}{l} Min\ 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in C \end{array} \right.$$

3. Pour $\epsilon > 0$ suffisamment petit (disons inférieur à 1/10), on remplace 4/3 par $4/3 - \epsilon$ dans la première équation définissant C, ce qui donne un nouveau polyèdre C_ϵ. Résoudre

   $$(\mathcal{P}_\epsilon) \left\{ \begin{array}{l} Min\ 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in C_\epsilon. \end{array} \right.$$

   Commenter.

Exercice 12. Considérons le programme linéaire $(\mathcal{P})$ suivant dans $\mathbb{R}^4$

$$(\mathcal{P}_\alpha) \left\{ \begin{array}{l} Min\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \geq 2 \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \geq \alpha \\ x_i \geq 0,\ \text{pour tout } i \end{array} \right.$$

1. Écrire le problème $(\mathcal{D}_\alpha)$ dual de $(\mathcal{P}_\alpha)$.
2. Résoudre $(\mathcal{D}_\alpha)$ suivant les valeurs de α. En déduire les solutions de $(\mathcal{P}_\alpha)$.