Feuille 2

Exercice 1. Une usine fabrique deux produits P_1 et P_2 dont les prix de vente à l'unité sont 6 et 4. Pour ce faire elle a besoin de main d'œuvre, de machine et de matières premières. Pour fabriquer une unité de P_1 (resp. P_2) il faut 3 (resp. 9) unités de machine, 4 (resp. 5) unités de main d'œuvre, 2 (resp. 1) unités de matières premières. L'usine dispose de 81 unités de machine, 55 unités de main d'œuvre et 20 unités de matières premières. Écrire le problème d'optimisation sous contraintes correspondant à ces données. Le résoudre.

Exercice 2. Soit A une matrice $m \times n$ et $b \in \mathbb{R}^m$. On considère l'ensemble

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n \ / \ Ax = b, x \geq 0\}.$$

Trouver une matrice B et un vecteur e tels que

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n \ / \ Bx \leq e\}.$$

Quel est le rang de B ? Est-il possible de trouver une matrice B qui permette cette description et qui soit de rang différent ?

Exercice 3. Soient K un ensemble convexe fermé de $\mathbb{R}^n$.

1. Montrer que si K contient une droite alors il existe un vecteur c dans $\mathbb{R}^n$ tel que la fonction $x \mapsto \langle c, x\rangle$ ne soit ni minorée ni majorée.
2. La réciproque est-elle vraie ?
3. Trouver un exemple de convexe C qui ne soit pas borné tel que pour tout c la fonction $x \mapsto \langle c, x\rangle$ est majorée ou minorée sur C.

Exercice 4. Soit $C := \{x \ / \ Ax \leq b, x \geq 0\}$ où A est une matrice $m \times n$. Posons

$$\tilde{C} := \{(x, u) \ / \ Ax + u = b, x \geq 0, u \geq 0\}.$$

Montrer l'équivalence entre :

(a) $\overline{x}$ est extrémal dans C ;

(b) $(\overline{x}, b - A\overline{x})$ est extrémal dans $\tilde{C}$.

Exercice 5. On considère une partie K convexe compacte du plan. On rapporte le plan à un système de coordonnées notées (x, y). Soient a et b deux nombres réels.

1. Montrer que la fonction $(x, y) \mapsto ax + by$ est bornée et atteint ses bornes sur K.
2. Soit (x_m, y_m) un point de K en lequel la fonction $(x, y) \mapsto ax + by$ est minimale sur K. Montrer que l'intersection de la droite d'équation $a(x - x_m) + b(y - y_m) = 0$ avec K est un segment (peut-être un point) dont les extrémités sont des points extrémaux de K.
3. En déduire une démonstration du fait que K est l'enveloppe convexe de l'ensemble de ses points extrémaux.

Exercice 6. Soient K un ensemble convexe fermé de $\mathbb{R}^n$ et x un point de $\mathbb{R}^n$ n'appartenant pas à K. Montrer qu'il existe un vecteur $v \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$ tels que

$$\forall z \in K, \ \langle v, z\rangle < \langle v, x\rangle - r.$$

Exercice 7. Soit C le polyèdre convexe fermé de $\mathbb{R}^2$ décrit à l'aide des inégalités suivantes

$$x_1 + \frac{8}{3}x_2 \leq 4,\ x_1 + x_2 \leq 2,\ 2x_1 \leq 3,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

Écrire C sous forme standard. Cela définit un convexe $\tilde{C}$. Quels sont les points extrémaux de $\tilde{C}$? En déduire les points extrémaux de C.

Exercice 8. Considérons le programme linéaire $(\mathcal{P})$ suivant

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} Max\langle c, x\rangle \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \text{où} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Quel est le problème dual $(\mathcal{D})$ de $(\mathcal{P})$? Vérifier que $x = (3, 2, 0, 0, 1)$ et $y = (1, 2, 0)$ sont solutions de $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{D})$ respectivement.

Exercice 9. Soit C le polyèdre convexe compact de $\mathbb{R}^4$ décrit comme suit :

$$\begin{cases} x_1 + \frac{4}{3}x_2 + 2x_3 = \frac{3}{2} \\ x_2 + 3x_3 = \frac{3}{2} \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ \forall i, x_i \geq 0 \end{cases}$$

1. Faire la liste des points extrémaux de C.
2. Résoudre

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} Min\ 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in C \end{cases}$$

3. Pour $\epsilon > 0$ suffisamment petit (disons inférieur à 1/10), on remplace 4/3 par $4/3 - \epsilon$ dans la première équation définissant C, ce qui donne un nouveau polyèdre C_ϵ. Résoudre

$$(\mathcal{P}_\epsilon) \begin{cases} Min\ 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in C_\epsilon. \end{cases}$$

   Commenter.

Exercice 10. Considérons le programme linéaire $(\mathcal{P})$ suivant dans $\mathbb{R}^4$

$$(\mathcal{P}_\alpha) \begin{cases} Min\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \geq 2 \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \geq \alpha \\ x_i \geq 0,\ \text{pour tout } i \end{cases}$$

1. Écrire le problème $(\mathcal{D}_\alpha)$ dual de $(\mathcal{P}_\alpha)$.
2. Résoudre $(\mathcal{D}_\alpha)$ suivant les valeurs de α. En déduire les solutions de $(\mathcal{P}_\alpha)$.