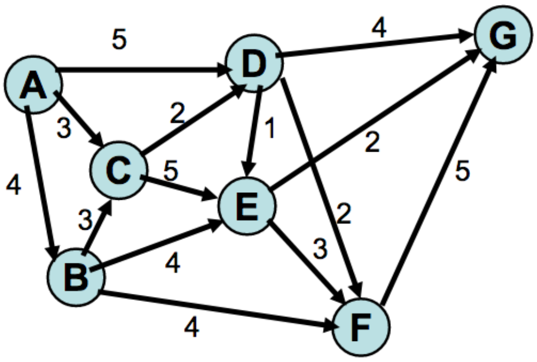
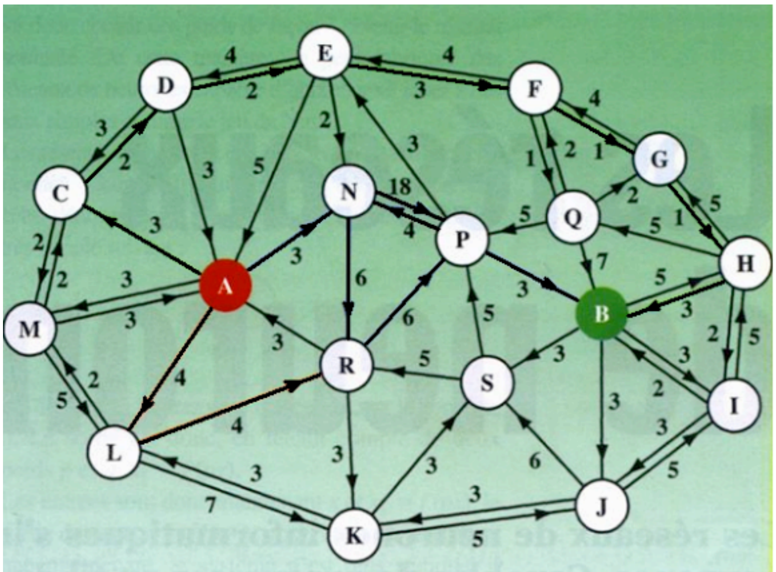
Feuille 1

Exercice 1. Utiliser l'algorithme de Dijkstra pour trouver les chemins les plus courts joignant A aux autres sommets dans les graphes suivants





Exercice 2. Deux villes sont placées de part et d'autre d'une rivière dont les rives sont des droites parallèles. Où placer un pont (perpendiculaire aux rives) pour que la distance routière séparant les deux villes soit minimale ? On suppose que des villes au pont la route est rectiligne.

Exercice 3. Tracer une droite Δ et deux points D et A. Tracer le plus court chemin DPA tel que $P \in \Delta$.

Exercice 4. Trouver les minima des fonctions suivantes sur $]0, +\infty[$:

$$f(x) = x\ln(x), \quad g(x) = x - \ln(x), \quad h(x) = x + \frac{1}{x}.$$

Démontrer rigoureusement que les valeurs trouvées sont bien les minima.

Exercice 5. Dans le plan $(0, x, y)$ on considère que la vitesse de la lumière est c_1 si $y > 0$, c_2 si $y < 0$. On se donne un point D de coordonnées $(0, y_D)$ avec $y_D > 0$ et A de coordonnées (x_A, y_A). Trouver le chemin de A à D qui minimise le temps de parcours de la lumière de A à D.

Exercice 6. Résoudre les problèmes d'affectation définis par les tableaux suivants en utilisant la méthode hongroise :

7	2	1	9	4
9	6	9	5	5
8	8	3	1	8
7	9	4	2	2
4	3	7	4	8

2	2	11	9	9
2	3	9	10	3
4	10	5	3	6
2	7	5	3	5
5	1	9	2	10

Exercice 7. Une entreprise de transport doit livrer des marchandises dans quatre villes. Elle a six camions dont les distances aux quatre villes sont données par le tableau suivant.

	Ville 1	Ville 2	Ville 3	Ville 4
Camion 1	22	19	58	45
Camion 2	66	77	35	55
Camion 3	38	31	19	47
Camion 4	64	34	72	62
Camion 5	35	27	41	41
Camion 6	23	57	54	38

À quels camions faut-il affecter les livraisons dans quelles villes pour que la somme des distances parcourues soit minimale ?

Exercice 8. Supposons qu'une matrice X de taille $m \times n$ avec $m \geq n$ soit de rang maximal. Quelle est la taille de la matrice ${}^tXX$? Montrer que ${}^tXX$ est inversible définie positive.

Exercice 9. Dire pourquoi on peut toujours supposer que A est symétrique quand on étudie l'application

$$x \mapsto \langle x, Ax \rangle.$$

Indication : Penser à l'écriture $\langle x, Ax \rangle = {}^t xAx$.

Exercice 10. Appliquer le procédé de Gram-Schmidt à partir des bases de $\mathbb{R}^3$ suivantes

1. $(1, 1, 0)$, $(0, 1, -1)$, $(-1, 2, 1)$;
2. $(1, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 2)$.

Exercice 11. Dessiner la région du plan définie par les inégalités

$$-x_1 + x_2 \leq 1, \; x_1 + x_2 \leq 4, \; 0 \leq x_1 \leq 3, \; x_2 \geq 0.$$

Trouver les points de cette région où les fonctions suivantes atteignent leurs valeurs maximales et minimales

$$2x_1 + x_2, \; x_1 + x_2, \; x_1 + 2x_2.$$

Exercice 12. Résoudre graphiquement le problème

$$Max \; 2x_1 + 6x_2$$

sous les contraintes

$$-x_1 + x_2 \leq 1, \; 2x_1 + x_2 \leq 2, \; x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0.$$