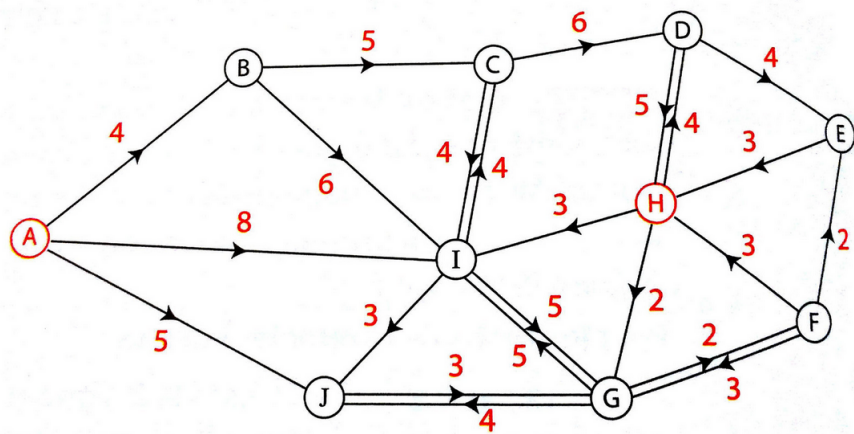
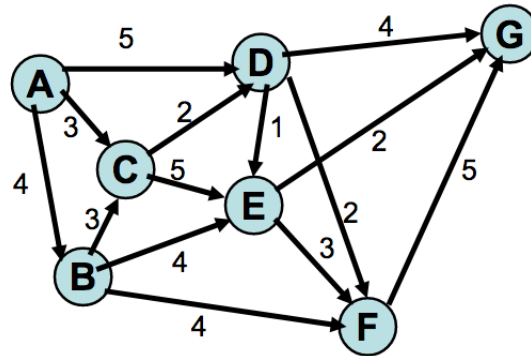


Feuille 1

Exercice 1. Utiliser l'algorithme de Dijkstra pour trouver les chemins les plus courts de A à G et de A à H dans les graphes suivants



Exercice 2. Deux villes sont placées de part et d'autre d'une rivière dont les rives sont des droites parallèles. Où placer un pont (perpendiculaire aux rives) pour que la distance routière séparant les deux villes soit minimale ? On suppose que des villes au pont la route est rectiligne.

Exercice 3. Tracer une droite Δ et deux points D et A . Tracer le plus court chemin DPA tel que $P \in \Delta$.

Exercice 4. Trouver les minima des fonctions suivantes sur $]0, +\infty[$:

$$f(x) = x \ln(x), \quad g(x) = x - \ln(x), \quad h(x) = x + \frac{1}{x}.$$

Démontrer rigoureusement que les valeurs trouvées sont bien les minima.

Exercice 5. Dans le plan $(0, x, y)$ on considère que la vitesse de la lumière est c_1 si $y > 0$, c_2 si $y < 0$. On se donne un point D de coordonnées $(0, y_D)$ avec $y_D > 0$ et A de coordonnées (x_A, y_A) . Trouver le chemin de A à D qui minimise le temps de parcours de la lumière de A à D .

Exercice 6. Un éléphant doit se déplacer le long d'une route. Les seules ressources dont il dispose sont des bananes. Une banane lui permet de parcourir un kilomètre. Il peut transporter jusqu'à mille bananes à la fois (pas plus). Un tas de trois mille bananes est placé au kilomètre zéro. De quelle façon doit-il procéder pour aller le plus loin possible sur la route ?

Exercice 7. Résoudre les problèmes d'affectation définis par les tableaux suivants en utilisant la méthode hongroise :

7	2	1	9	4
9	6	9	5	5
8	8	3	1	8
7	9	4	2	2
4	3	7	4	8

2	2	11	9	9
2	3	9	10	3
4	10	5	3	6
2	7	5	3	5
5	1	9	2	10

Exercice 8. Une entreprise de transport doit livrer des marchandises dans quatre villes. Elle a six camions dont les distances aux quatre villes sont données par le tableau suivant.

	Ville 1	Ville 2	Ville 3	Ville 4
Camion 1	22	19	58	45
Camion 2	66	77	35	55
Camion 3	38	31	19	47
Camion 4	64	34	72	62
Camion 5	35	27	41	41
Camion 6	23	57	54	38

À quels camions faut-il affecter les livraisons dans quelles villes pour que la somme des distances parcourues soit minimale ?

Exercice 9. Supposons qu'une matrice X de taille $m \times n$ avec $m \geq n$ soit de rang maximal. Quelle est la taille de la matrice tXX ? Montrer que tXX est inversible définie positive.

Exercice 10. Dessiner la région du plan définie par les inégalités

$$-x_1 + x_2 \leq 1, \quad x_1 + x_2 \leq 4, \quad 0 \leq x_1 \leq 3, \quad x_2 \geq 0.$$

Trouver les points de cette région où les fonctions suivantes atteignent leurs valeurs maximales et minimales

$$2x_1 + x_2, \quad x_1 + x_2, \quad x_1 + 2x_2.$$

Exercice 11. Résoudre graphiquement le problème

$$\text{Max } 2x_1 + 6x_2$$

sous les contraintes

$$-x_1 + x_2 \leq 1, \quad 2x_1 + x_2 \leq 2, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$