Solution de l'exercice 9 de la feuille 2

On note $A = \begin{pmatrix} 1 & 4/3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 3/2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$.

Le convexe C est défini par $C = \{x \in \mathbb{R}^4 / Ax = b,\ x \geq 0\}$.
(forme standard !)

1) Pour déterminer les points extrémaux de C, on utilise la proposition 3.13 des notes de cours.

Les sommets sont donnés par (x_B, x_N) où :

- B est un ensemble d'indices de $\{1, 2, 3, 4\}$ tel que A_B est inversible (donc $\#B = 3$)
- $A_B^{-1} b \geq 0$
- $x_B = A_B^{-1} b$ et $x_N = (0)$.

Pour chacune des sous-matrices de A à 3 colonnes, on doit vérifier si elle est inversible ; si oui, on calcule $A_B^{-1} b$, s'il est positif, il donne un sommet.

$A_{123} = \begin{pmatrix} 1 & 4/3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est non inversible $(3L_1 = 3L_3 + L_2)$, elle ne donne pas de sommet.

A_{124} est inversible, $A_{124}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}$

et $A_{124}^{-1} b = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 3/2 \\ 0 \end{pmatrix} \not\geq 0$: pas de sommet ici non plus.

A_{134} est inversible, $A_{134}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ -1 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}$

et $A_{134}^{-1} b = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \geq 0$. Alors $x_B = (1/2, \times, 1/2, 0)$
$x_N = (\times, 0, \times, \times)$

($\times$ représente la coordonnée absente)

et on obtient le sommet $\boxed{x = (1/2, 0, 1/2, 0).}$

A_{234} est inversible, $A_{234}^{-1} = \begin{pmatrix} 3/2 & -1 & 0 \\ -1/2 & 2/3 & 0 \\ -1 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}$

$A_{234}^{-1} b = \begin{pmatrix} 3/4 \\ 1/4 \\ 0 \end{pmatrix} \geq 0 \leadsto x_B = (\times, 3/4, 1/4, 0)$
$x_N = (0, \times, \times, \times)$

On obtient le sommet $\boxed{(0, 3/4, 1/4, 0).}$

$\boxed{\text{Ainsi, } C \text{ a deux sommets : } (1/2, 0, 1/2, 0) \text{ et } (0, 3/4, 1/4, 0).}$

<u>Remarque</u> : A est de rang 3. D'après le théorème du rang, son noyau est de dimension 1 donc l'équation $Ax = b$ définit un sous-espace affine de $\mathbb{R}^4$ de dimension 1 (donc une droite). C est un convexe inclus dans cette droite et a deux sommets, c'est donc un segment.

2) Résolvons $(\mathcal{P})$. D'après la remarque précédente, C est compact donc le minimum de la fonction objectif est atteint sur C, et en l'un des deux sommets. En $(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0)$ la fonction objectif vaut 2, en $(0, 3/4, 1/4, 0)$ elle vaut 1 donc le minimum de la fonction est 1, atteint en $(0, 3/4, 1/4, 0)$.

3) On recommence les calculs de la question 1 (en observant que A_{134} n'a pas changé). On obtient :

$A_{123} \rightarrow$ sommet $(\frac{1}{2}, 0, 1/2, 0)$

$$A_{124} \rightarrow A_{124}^{-1} b = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} + 3/2\,\varepsilon \\ 3/2 \\ -\frac{3}{2}\varepsilon \end{pmatrix} \rightarrow \text{pas de sommet.}$$

$-\frac{3}{2}\varepsilon \rightarrow < 0$

$A_{134} \rightarrow$ sommet $(1/2, 0, 1/2, 0)$

$$A_{234} \rightarrow \text{sommet } \left(0, \frac{3}{4} \times \frac{1}{1-\frac{3}{2}\varepsilon}, \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \times \frac{1}{1-\frac{3}{2}\varepsilon}, \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{1-\frac{3}{2}\varepsilon}\right)$$

$(\varepsilon < \frac{2}{3})$

Le nouveau polyèdre obtenu a toujours 2 sommets (d'après la remarque, il pourrait aussi être une demi-droite et n'avoir qu'un sommet a priori, mais on ne peut pas obtenir plus de 2 sommets). En $\left(0, \frac{3}{4} \times \frac{1}{1-\frac{3}{2}\varepsilon}, 1/2 - \frac{1}{4} \times \frac{1}{1-\frac{3}{2}\varepsilon}, \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{1-\frac{3}{2}\varepsilon}\right)$, la fonction objectif vaut 1. Le minimum n'a pas changé, $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ a donc pour solution 1 atteint en le dernier sommet.

ex 9 F2

Commentaire

- Les deux convexes se ressemblent : ce sont des segments et le second est obtenu à partir du premier en déplaçant légèrement un sommet.
- Les solutions des deux problèmes sont égales.

Si on note $x_0 = \left(0, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}, 0\right)$ et x_ε le sommet associé de C_ε, on a

$$v := x_\varepsilon - x_0 = \left(1 - \frac{1}{1-\frac{3}{2}\varepsilon}\right) \times \left(0, -\frac{3}{4}, +\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$$

or $\left(0, -\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ est dans le noyau de la fonction objectif. Le sommet a donc été déplacé le long d'un hyperplan de niveau de la fonction.

dessin