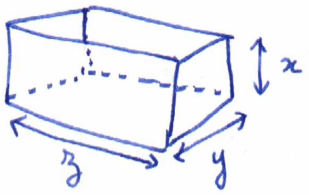
exercice 8, feuille n°4

Boîte : (sans couvercle)



- le volume de la boîte (fonction à maximiser) est
$$v(x,y,z) = xyz$$

- la contrainte est que la surface de la boîte est imposée : $S(x,y,z) = S$
où $S(x,y,z) = zy + 2xy + 2xz$

- en outre, les dimensions de la boîte sont des nombres positifs.

On admet dans un premier temps que le maximum existe et que c'est un extremum lié à la contrainte $s(x,y,z) = S$.

On a $\nabla S(x,y,z) = (2y+2z,\ 2x+z,\ 2x+y)$.

On résout $\nabla s = 0$ sur $\mathbb{R}^3$:
$$\nabla s(x,y,z) = 0 \iff \begin{cases} 2y+2z = 0 \\ 2x+z = 0 \\ 2x+y = 0 \end{cases}$$

La matrice du système est $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et est inversible (le vérifier !)

donc $\nabla s(x,y,z) = 0 \iff (x,y,z) = (0,0,0)$
et $(0,0,0)$ ~~ne~~ n'appartient pas à l'ensemble défini par les contraintes.

Comme v, s sont C^1 et ∇s ne s'annule pas sur l'ensemble $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, s(x,y,z) - S = 0\}$, on peut appliquer le théorème de Lagrange : si (x_0, y_0, z_0) est un extremum lié, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\nabla v(x_0, y_0, z_0) = \lambda \, \nabla s(x_0, y_0, z_0).$$

On résout

$$(S) : \begin{cases} \nabla v(x,y,z) = \lambda \, \nabla s(x,y,z) \\ s(x,y,z) = S \end{cases}$$

$$(S) \iff \begin{cases} yz = 2\lambda y + 2\lambda z = \lambda(2y + 2z) \\ xz = \lambda(2x + z) \\ xy = \lambda(2x + y) \\ zy + 2xy + 2xz = S \end{cases}$$

* si $x = 0$ alors $(S) \iff \begin{cases} yz = 2\lambda(y+z) \\ 0 = \lambda z \\ 0 = \lambda y \\ zy = S \end{cases}$ (2)

si $S \neq 0$ (hypothèse raisonnable, sinon la boîte n'a pas de surface) alors $z \neq 0$ donc (2) $\Rightarrow \lambda = 0$

et (1) $\Rightarrow y = 0$ ~~dans~~, (4) $\Rightarrow S = 0$: contradiction.

On en déduit $x \neq 0$. <u>De même, on montre $y \neq 0$, $z \neq 0$</u>

Ainsi, comme $x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$ (et donc $\lambda \neq 0$)

$$(S) \iff \begin{cases} \left.\begin{array}{l} \frac{1}{\lambda} = 2 \times \frac{1}{z} + 2 \times \frac{1}{y} \\ \frac{1}{\lambda} = 2 \times \frac{1}{z} + \frac{1}{x} \\ \frac{1}{\lambda} = 2 \times \frac{1}{y} + \frac{1}{x} \end{array}\right\} \text{système linéaire en } \frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z} \\ zy + 2xy + 2xz = S \end{cases}$$

Avec de l'algèbre linéaire, les trois premières équation se résolvent :

$$(S) \iff \begin{cases} \frac{1}{x} = \frac{1}{2\lambda} \\ \frac{1}{y} = \frac{1}{4\lambda} \\ \frac{1}{z} = \frac{1}{4\lambda} \\ 3y + 2xy + 2xz = 5 \end{cases}$$

donc $(S) \iff \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 4\lambda \\ z = 4\lambda \\ 48\lambda^2 = 5 \end{cases}$

ce qui donne pour solutions

$$\begin{cases} \lambda = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{3}} \\ x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}} \\ y = z = \sqrt{\frac{5}{3}} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \lambda = -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{3}} \\ x = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}} \\ y = z = -\sqrt{\frac{5}{3}} \end{cases}$$

Seule la première donne un point $p_0 = \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}}, \sqrt{\frac{5}{3}}, \sqrt{\frac{5}{3}}\right)$ à coordonnées toutes positives et $v(p_0) = \boxed{\frac{5\sqrt{5}}{6\sqrt{3}}}$

Justifions que v atteint un maximum sur

$S' := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, s(x,y,z) = S,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\}$.

1- Montrons que ~~s~~ sur S', v est borné..

On a x, y, z positifs donc

$$S \geq yz, \quad S \geq zx, \quad S \geq xy. \qquad (*)$$

Supposons $x \leq y$: alors $x = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{xy} \leq \sqrt{S}$

donc $v(x,y,z) = xyz \leq \sqrt{S} \times S$.

(borne qui ne dépend que de S).

Bien sûr, si $y \leq x$, on procède dans l'autre sens.

2- Montrons que sur $S' \setminus B^{\infty}(0_{\mathbb{R}^3}, M)$, pour un certain $M > 0$, la fonction est inférieure à $\frac{S\sqrt{S}}{18} < \frac{S\sqrt{S}}{6\sqrt{3}} = v(p_0)$.

Si $z \geq M$, d'après $(*)$ $x \leq \frac{S}{z}$, $y \leq \frac{S}{z} \leq \frac{S}{M}$

On a $v(x,y,z) \leq \frac{S}{z} \times \frac{S}{z} \times z = \frac{S^2}{z} \leq \frac{S^2}{M}$

si on pose $M = 18\sqrt{S}$, on a $v(x,y,z) \leq \frac{S\sqrt{S}}{18}$

dès que $z \geq M$. Cela marche aussi en échangeant les rôles des variables. Ainsi, dès que $\|\underset{S'}{(x,y,z)}\|_\infty \geq M$

~~au moins~~ norme ∞ : max des $|\cdot|$ des coordonnées

on a $v(x,y,z) \leq \frac{S\sqrt{S}}{18}$.

3- Le maximum sur S', s'il existe, est supérieur à $v(p_0) = \frac{\sqrt{S} \times S}{6\sqrt{3}}$ donc ne peut être atteint que sur $\{(x,y,z) \,/\, \|(x,y,z)\|_\infty \leq M\} \cap S'$ qui est un compact (S' est fermé (le montrer : image réciproque de fonction continue) et la boule pour $\|\cdot\|_\infty$ est compacte).

4 - Comme $\{(x,y,z) \mid \|(x,y,z)\|_\infty \leq M\} \cap S'$ est compact, v (continue) atteint ses bornes dessus. Deux possibilités :

- soit le maximum est dans l'intérieur de S' (en tant que partie de $\{s(x,y,z) - S = 0\}$)
- soit il est dans le bord de S'.

Dans le premier cas, ~~on a~~ le maximum est ~~un pour~~ aussi un maximum local lié à $s(x,y,z) = S$ (sans hypothèse de positivité des coordonnées). Il correspond à un ~~extremum~~ ~~lié~~ point trouvé par le théorème de Lagrange. Il n'y a qu'un seul candidat : p_0.

Dans le second cas : le bord de S' est $(\{x=0\} \cup \{y=0\} \cup \{z=0\}) \cap \{s=S\}$ pour les points du bord, v est nul (et inférieur à $v(p_0)$).

Conclusion : le maximum est atteint, il est dans l'intérieur de S' et atteint uniquement en p_0.

Le volume de la boîte est $\frac{S\sqrt{S}}{6\sqrt{3}}$ pour ~~des~~ une longueur et une largeur de $\frac{\sqrt{S}}{\sqrt{3}}$ et une hauteur de $\frac{1}{2}\frac{\sqrt{S}}{\sqrt{3}}$.

<u>Remarque</u> : la formule est homogène : la dimension d'une surface est L^2 (i.e : se mesure en m^2), celle d'un volume est L^3.

Celle de $\frac{\sqrt{S}}{\sqrt{3}}$ est L : les largeur, hauteur et longueur de la boîte sont bien des longueurs.

Le volume $\frac{S\sqrt{S}}{6\sqrt{3}}$ est bien L^3 comme attendu.

<u>Autre remarque</u> : pour un aperçu des conditions, utilisez Wolfram Alpha par exemple : on obtient une représentation graphique de la surface définie par la contrainte.

Enfin, on peut également appliquer le théorème de Karush-Kuhn-Tucker pour résoudre cet exercice. Cela ne dispense pas de justifier l'existence d'un maximum (points 1, 2, 3).