

Exercice 8

Problème dual.

$$(D) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Min } \langle y, b \rangle \\ \text{s.c. } \left\{ \begin{array}{l} {}^t A y \geq c \\ y \geq 0 \end{array} \right. \end{array} \right. \quad y \in \mathbb{R}^3$$

Vérifier que ces deux vecteurs satisfont les contraintes.

$$\text{Pour } x = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \langle c, x \rangle = 3 \times 4 + 5 \times 2 + 0 = 22$$

$$\text{Pour } y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \langle b, y \rangle = 1 \times 8 + 2 \times 7 + 0 \times 3 = 22$$

Or si x et y vérifient leurs contraintes respectives

$$\langle c, x \rangle \leq \langle {}^t A y, x \rangle = \langle y, A x \rangle \leq \langle y, b \rangle$$

\uparrow car $x \geq 0$ et $c \leq {}^t A y$ \uparrow car $y \geq 0$ et $A x \leq b$.

Toute valeur de la fonction objectif du problème (P) est inférieure ou égale à toute valeur de la fonction objectif du problème (D). Si on trouve une valeur commune à ces deux fonctions objectif elle est donc optimale pour chacun des deux problèmes.