

L'ensemble $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 4\}$ est compact. Comme la fonction $T: (x, y, z) \mapsto 2 + xz + y^2$ est continue (elle est polynomiale) elle atteint ses bornes sur cet ensemble.

Cherchons les points où les conditions de Lagrange sont satisfaites.

$$\text{grad}(x^2 + y^2 + z^2) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \neq 0 \text{ sur } S.$$

En un point (x, y, z) de S où T est maximale il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tq

$$\text{grad } T = \lambda \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}.$$

*Théorème des extrema liés
(une seule contrainte)*

autrement dit le système suivant est vérifié :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 & (1) \\ z = 2\lambda x & (2) \\ 2y = 2\lambda y & (3) \\ x = 2\lambda z & (4) \end{cases}$$

De (2) et (4) on déduit $z = 2\lambda(2\lambda)z = 4\lambda^2 z$.
 $(1 - 4\lambda^2)z = 0$

On a donc $z = 0$ ou $4\lambda^2 = 1$.

• Si $z = 0$ alors (4) donne $x = 0$ puis (1) $y^2 = 4$
On obtient ainsi deux points : $(0, 2, 0)$ et $(0, -2, 0)$.

• Si $4\lambda^2 = 1$ alors $2\lambda = \pm 1$.

Si $2\lambda = 1$ alors $x = z$ par (2)

et $2y = y$ par (3) donc $y = 0$

De (1) on déduit $2x^2 = 4$ $x^2 = 2$ $x = \pm\sqrt{2}$

On obtient deux autres points : $(\sqrt{2}, 0, \sqrt{2})$, $(\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2})$

Si $2\lambda = -1$ alors $x = -z$ par (2)

et $2y = -y$ par (3) donc $y = 0$.

De (1) on déduit $2x^2 = 4$ $x = \pm\sqrt{2}$.

On obtient deux points de plus : $(\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2})$

La condition nécessaire donnée par le théorème des extrema liés est remplie en six points. Les maximum et minimum de T sur S sont atteints en des points

pris parmi ces six.

On calcule les valeurs de T en ces six points

$$T(0, 2, 0) = T(0, -2, 0) = 6$$

$$T(\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}) = T(-\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2}) = 4$$

$$T(\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2}) = T(-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}) = 0$$

Conclusion :

Le maximum de T sur S est 6 atteint
aux points $(0, 2, 0)$ et $(0, -2, 0)$

Le minimum de T sur S est 0 atteint
aux points $(\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2})$.