Exercice 7

Le convexe $\tilde{C}$ est défini à partir de C comme dans l'exercice 4. On ajoute de nouvelles variables x_3, x_4, x_5 telles que :

$$x_1 + \frac{8}{3} x_2 + x_3 = 4$$
$$x_1 + x_2 + x_4 = 2 \qquad x_i \geqslant 0 \quad \forall i = 1,2,3,4,5$$
$$2x_1 + x_5 = 3$$

La matrice associée est

$$\underbrace{\begin{matrix} 1 & 8/3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{A} \left| \begin{matrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \right. \atop \quad b$$

Pour trouver les sommets de $\tilde{C}$ on extrait des matrices 3×3 inversibles de A (qu'on appelle A_B par exemple), on calcule $A_B^{-1} b$, si les coordonnées de $A_B^{-1} b$ sont $\geqslant 0$ alors ces trois coordonnées complétées par deux 0 donnent un sommet.

A priori ici on pourrait trouver $\binom{5}{3}^{=10}$ sommets. (c'est le nombre de façons d'extraire des matrices 3×3 ; on choisit trois colonnes parmi 5)

Colonnes 3,4,5

$$A_B = I_3 \qquad A_B^{-1} b = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Sommet $(0, 0, 4, 2, 3)$

Colonnes 2,4,5

$$A_B = \begin{pmatrix} 8/3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcul de $A_B^{-1} b$: $\left| \begin{array}{l} 8/3\, x_2 = 4 \\ x_2 + x_4 = 2 \\ x_5 = 3 \end{array} \right| \begin{array}{l} x_2 = 3/2 \\ x_4 = 2 - 3/2 = 1/2 \\ x_5 = 3 \end{array}$

Sommet $(0, 3/2, 0, 1/2, 3)$

Colonnes 2,3,5

$$A_B = \begin{pmatrix} 8/3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcul de $A_B^{-1} b$: $\left| \begin{array}{l} 8/3\, x_2 + x_3 = 4 \\ x_2 = 2 \\ x_5 = 3 \end{array} \right. \qquad \begin{array}{l} x_3 = 4 - \frac{8}{3} \cdot 2 = \frac{12-16}{3} < 0 \\ x_2 = 2 \\ x_5 = 3 \end{array}$

Le choix de colonnes 2,3,5 ne donne pas de sommet.

Colonnes 2, 3, 4

$$A_B = \begin{pmatrix} 8/3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A_B n'est pas inversible.

Calcul de $A_B^{-1} b$

$$\left| \begin{array}{l} 8/3\, x_2 + x_3 = 4 \\ x_2 + x_4 = 2 \\ 0 = 3 \end{array} \right.$$

Pas de solution.
Pas de sommet.

Colonnes 1, 4, 5

$$A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcul de $A_B^{-1} b$

$$\left| \begin{array}{l} x_1 = 4 \\ x_1 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_5 = 3 \end{array} \right. \qquad \begin{array}{l} x_1 = 4 \\ x_4 = 2 - 4 = -2 < 0 \\ x_5 = 3 - 8 = -3 < 0 \end{array}$$

Le choix de colonnes 1, 4, 5 ne donne pas de sommet.

Colonnes 1, 3, 5

$$A_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcul de $A_B^{-1} b$

$$\left| \begin{array}{l} x_1 + x_3 = 4 \\ x_1 = 2 \\ 2x_1 + x_5 = 3 \end{array} \right. \qquad \begin{array}{l} x_3 = 2 \\ x_1 = 2 \\ x_5 = -1 < 0 \end{array}$$

Pas de sommet.

Colonnes 1, 3, 4

$$A_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcul de $A_B^{-1} b$:

$$\left| \begin{array}{l} x_1 + x_3 = 4 \\ x_1 + x_4 = 2 \\ 2x_1 = 3 \end{array} \right| \quad \begin{array}{l} x_3 = 5/2 \\ x_4 = 1/2 \\ x_1 = 3/2 \end{array}$$

Sommet $(3/2, 0, 5/2, 1/2, 0)$

Colonnes 1, 2, 5

$$A_B = \begin{pmatrix} 1 & 8/3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcul de $A_B^{-1} b$.

$$\left| \begin{array}{l} x_1 + \frac{8}{3} x_2 = 4 \\ x_1 + x_2 = 2 \\ 2x_1 + x_5 = 3 \end{array} \right| \to \frac{5}{3} x_2 = 2 \qquad x_2 = \frac{6}{5}$$

$$\left| \begin{array}{l} x_1 = 4/5 \\ x_2 = 6/5 \\ x_5 = 7/5 \end{array} \right.$$

Sommet $(4/5, 6/5, 0, 0, 7/5)$

Colonnes 1, 2, 4

$$A_B = \begin{pmatrix} 1 & 8/3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pas de sommet.

Calcul de $A_B^{-1} b$

$$\left| \begin{array}{l} x_1 + 8/3\, x_2 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 2 \\ 2x_1 = 3 \end{array} \right.$$

$x_1 = \frac{3}{2}$

$\frac{8}{3} x_2 = 4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2} \qquad x_2 = \frac{15}{16}$

$x_4 = 2 - \frac{3}{2} - \frac{15}{16} < 0$

Colonnes 1, 2, 3

$$A_B = \begin{pmatrix} 1 & 8/3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcul de $A_B^{-1} b$: $\left| \begin{array}{l} x_1 + 8/3\, x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 = 2 \\ 2x_1 = 3 \end{array} \right.$

$x_1 = 3/2$

$x_2 = 1/2$

$x_3 = 4 - 3/2 - 4/3$

$= \dfrac{24 - 9 - 8}{6} = 7/6$

Sommet $(3/2, 1/2, 7/6, 0, 0)$

On a vu dans l'exercice 4 que pour trouver les points extrêmaux de C à partir de ceux de $\tilde{C}$ il suffit de conserver les deux premières coordonnées

Points extr. de $\tilde{C}$	Points extré. de C
$(0, 0, 4, 2, 3)$	$(0, 0)$
$(0, 3/2, 0, 1/2, 3)$	$(0, 3/2)$
$(3/2, 0, 5/2, 1/2, 0)$	$(3/2, 0)$
$(4/5, 6/5, 0, 0, 7/5)$	$(4/5, 6/5)$
$(3/2, 1/2, 7/6, 0, 0)$	$(3/2, 1/2)$

R_7 Dessin de C