

Solution de l'exercice 6, feuille 3

1/2

Soit $f: (x, y) \mapsto x^3 + 3x^2 + y^2$

1. Cherchons les points critiques de f sur $\mathbb{R}^2$.

On dérive f : pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y.$$

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y) = 0 &\iff \begin{cases} 3x(x-2) = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \\ &\iff (x, y) \in \{(0, 0), (2, 0)\}. \end{aligned}$$

La fonction f a deux points critiques: $(0, 0)$ et $(2, 0)$.

Déterminons leur nature: on calcule la hessienne.

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6(x-1), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$$

$$\text{Hess } f(x, y) = \begin{pmatrix} 6(x-1) & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Ainsi } \text{Hess } f_{(0,0)} = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{déterminant} < 0 \\ \rightarrow \text{point selle.} \end{array}$$

$$\text{Hess } f_{(2,0)} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{déterminant} > 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0 \rightarrow \text{minimum local.} \end{array}$$

Ainsi, f a un point selle en $(0, 0)$ et un minimum local en $(2, 0)$ qui vaut -4 .

Ex 12

2/2

2. sur le carré $\{(x,y) \mid 0 \leq x,y \leq 2\} =: C$:

f n'a pas de point critique dans l'intérieur du carré.

Comme le carré est compact, f atteint ses bornes, et ce sera donc sur le bord. On paramètre les côtés du carré:

$$f_b: [0,2] \rightarrow \mathbb{C}$$

$$t \mapsto f(t,0) = t^3 - 3t^2 = t^2(t-3)$$

$$f_g: [0,2] \rightarrow \mathbb{C}$$

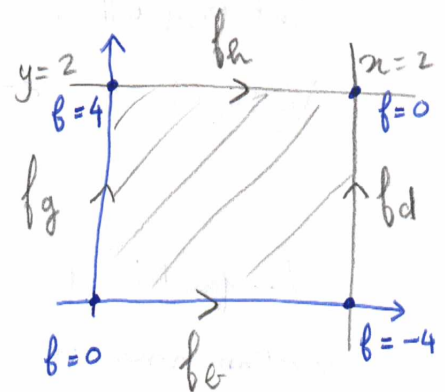
$$t \mapsto f(0,t) = t^2$$

$$f_d: [0,2] \rightarrow \mathbb{C}$$

$$t \mapsto f(2,t) = t^2 - 4$$

$$f_h: [0,2] \rightarrow \mathbb{C}$$

$$t \mapsto f(t,2) = t^3 - 3t^2 + 4$$



* f_g est croissante, $f_g(0)=0$, $f_g(2)=4$.

* f_d aussi, $f_d(0)=-4$, $f_d(2)=0$

* Variations de f_b : f_b est dérivable sur $[0,2]$,

$$f_b'(t) = 3t^2 - 6t = 3t(t-2).$$

f_b' ne s'annule pas dans l'intérieur de $[0,2]$, elle est négative sur cet intervalle: ainsi f_b est décroissante.

$$f_b(0) = 0, f_b(2) = -4.$$

* de même, f_h est décroissante: elle atteint ses extrema en ses bornes.

Ainsi, les valeurs extrêmes prises par f sur le bord du carré sont -4 et 4 . Ce sont respectivement le minimum global et le maximum global de f sur le carré, atteints en $(2,0)$ pour le minimum et $(0,2)$ pour le maximum. Le fait que $(2,0)$ soit un point critique de f sur $\mathbb{R}^2$ est une coïncidence: $(0,2)$ en revanche n'en est pas un!