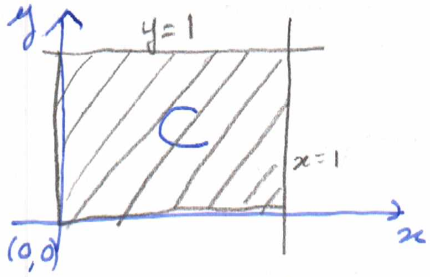
Solution de l'exercice 5, feuille 3

Soit $f : (x,y) \longmapsto xy(1-x^2-y^2)$ définie sur

$C := \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}$

$ = [0,1] \times [0,1]$



Le domaine de définition est compact : f atteint son maximum et son minimum globaux dessus, mais peut-être sur un bord.

Cherchons d'abord les points critiques de f dans l'intérieur du carré. La fonction f est un polynôme, elle est donc dérivable et pour tout $(x,y) \in]0,1[\times]0,1[$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y(1-3x^2-y^2), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x(1-x^2-3y^2).$$

Soit $(x,y) \in]0,1[\times]0,1[$.

$$\nabla f(x,y) = 0 \iff \begin{cases} y(1-3x^2-y^2) = 0 \\ x(1-x^2-3y^2) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = 0 \\ x^2 - 1 = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y^2 - 1 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} 3x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + 3y^2 = 1 \end{cases}$$

Les 3 premiers systèmes n'ont pas de solution dans $]0,1[\times]0,1[$

donc $\nabla f(x,y) = 0 \iff \begin{cases} 3x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + 3y^2 = 1 \end{cases}$ Système linéaire en x^2 et y^2

$$\iff \begin{cases} 3x^2 + y^2 = 1 \\ -8x^2 = -2 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$$

$$\iff \begin{cases} x^2 = \frac{1}{4} \\ y^2 = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

$\iff (x,y) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ (seule solution dans $]0,1[\times]0,1[$)

f a donc un point critique.

On dérive f une deuxième fois : pour tout $(x,y) \in]0,1[\times]0,1[$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -6xy \;,\; \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 1 - 3x^2 - 3y^2 \;,\; \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -6xy.$$

$$\mathrm{Hess} f_{(x,y)} = \begin{pmatrix} -6xy & 1-3x^2-3y^2 \\ 1-3x^2-3y^2 & -6xy \end{pmatrix}$$

donc $\mathrm{Hess} f_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})} = \begin{pmatrix} -3/2 & -1/2 \\ -1/2 & -3/2 \end{pmatrix}$ déterminant > 0

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) < 0$

f admet un maximum local en $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

et $f(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = \frac{1}{8}$.

Étudions maintenant le bord de f. Le minimum de la fonction est atteint en un point critique ou sur le bord : comme il n'y a pas de minimum local, ce sera sur le bord. Le maximum est atteint au point critique trouvé ou sur le bord : il faudra comparer, on ne peut pas savoir a priori.

On paramètre le bord. Pour simplifier, on sépare les quatre côtés :

côté bas : $f_b : [0,1] \to \mathbb{C}$
$\quad t \longmapsto f(t,0) = 0$

côté gauche : $f_g : [0,1] \to \mathbb{C}$
$\quad t \longmapsto f(0,t) = 0$

côté droit : $f_d : [0,1] \to \mathbb{C}$
$\quad t \longmapsto f(1,t) = -t^3$

côté haut : $f_h : [0,1] \to \mathbb{C}$
$\quad t \longmapsto f(t,1) = -t^3$

* f_b et f_g sont constantes et nulles.
* f_h et f_d sont décroissantes, ont pour maximum 0 (correspondant aux points $(0,1)$ et $(1,0)$) et pour minimum -1 (au point $(1,1)$).

Ainsi, sur le bord, f a pour maximum 0 (sur les côtés bas et gauche) et pour minimum -1 (en $(1,1)$).

<u>Synthèse</u> : - f a un point critique, $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, en lequel elle atteint son maximum global sur le carré (qui vaut $\frac{1}{8}$) (c'est donc aussi un maximum local).

- f atteint son minimum global en $(1,1)$, sur le bord du carré ; le minimum vaut -1.