Solution de l'exercice 4 de la feuille n°4 (version développement de Taylor)

Soit $x \in \mathbb{R}^d$. Soit $h$ un vecteur de $\mathbb{R}^d$. On a

$$J(x+h) = \frac{1}{2}\langle A(x+h), x+h\rangle - \langle b, x+h\rangle$$

$$= \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle + \frac{1}{2}\langle Ah, x\rangle + \frac{1}{2}\langle Ax, h\rangle + \frac{1}{2}\langle Ah, h\rangle - \langle b, x\rangle - \langle b, h\rangle$$

$= \langle Ax, h\rangle$ car ${}^tA = A$

$$= J(x) + \langle Ax, h\rangle - \langle b, h\rangle + \frac{1}{2}\langle Ah, h\rangle$$

$$= J(x) + \langle Ax - b, h\rangle + \frac{1}{2}\,{}^th\,A\,h + \underbrace{o(\|h\|^2)}_{\text{c'est nul ici en fait.}}$$

On identifie dans le développement de Taylor à l'ordre 2 le gradient de $J$ : $\nabla J_x = Ax - b$

et sa hessienne $\mathrm{Hess}\, J_x = A$

- Comme la hessienne de $J$ est définie positive, $J$ est convexe.

- $A$ est définie positive, elle est donc inversible (feuille 1, exercice 9). Ainsi $\nabla J_x = 0 \iff Ax - b = 0$
$\iff x = A^{-1}b$.

Il existe un unique point critique qui est $A^{-1}b$. Le théorème 4.2 affirme que puisque $J$ est convexe, ce point critique est un minimum global.

Conclusion : $J$ a un unique minimum global en $x_{min} := A^{-1}b$.