

On cherche le maximum de $f(x, y, z) = x + z$
sans la contrainte $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (i.e. (x, y, z) appartient
à la sphère unité).
 S

* La sphère est compacte et f est continue, donc
 f est bornée et atteint ses bornes sur S . Le maximum
cherché existe.

* En particulier, les points où f atteint son maximum sont
des maxima locaux liés à la contrainte $g(x, y, z) = 0$
où $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$.

* On vérifie $\nabla g \neq 0$ sur S (pour appliquer le théorème
de Lagrange).

$$\nabla g(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)$$

$$\text{donc } \nabla g(x, y, z) = 0 \iff (x, y, z) = (0, 0, 0) \notin S.$$

$\hookrightarrow \nabla g$ ne s'annule pas sur S .

Comme g, f sont C^1 et $\nabla g \neq 0$ sur S , si f admet
un extremum lié en (x_0, y_0, z_0) alors on a

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} \quad \nabla f(x_0, y_0, z_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0, z_0).$$

On cherche les points candidats: on résout le système

$$(S) \begin{cases} \nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z) \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases} \quad \text{d'inconnues } \lambda, (x, y, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3.$$

$$\nabla f(x, y, z) = (1, 0, 1) \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

$$\text{Ainsi (S)} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 2\lambda x \\ 0 = 2\lambda y \\ 1 = 2\lambda z \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 2\lambda(x-z) & L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ 0 = 2\lambda y \\ 1 = 2\lambda z \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

La dernière équation impose $\lambda \neq 0$ donc

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = x - z & (1) \\ 0 = y & (2) \\ 1 = 2\lambda z & (3) \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 & (4) \end{cases}$$

Ainsi, en ré-injectant (2) et (1) dans (4):

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = x - z \\ 0 = y \\ 1 = 2\lambda z \\ 2z^2 = 1 \end{cases}$$

Ce qui a pour solutions $(x, y, z) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$ et $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}$
 et $(x, y, z) = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ et $\lambda = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Cela donne deux points, possibles extréma liés.
 Le maximum étant l'un d'entre eux, f atteint son
 max en $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$, et $f(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}) = \sqrt{2}$.

De même, f atteint son minimum, en $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ (il vaut $-\sqrt{2}$).