Solution de l'exercice 4 de feuille n°3

On étudie les extrema locaux et points selle de la fonction $f : (x,y) \longmapsto x^2y^2 - 2x^2 - y^2$ définie sur $\mathbb{R}^2$.

Commençons par chercher les points critiques. La fonction est dérivable et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy^2 - 4x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x^2y - 2y.$$

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\nabla f(x,y) = 0 \iff \begin{cases} 2xy^2 - 4x = 0 \\ 2x^2y - 2y = 0 \end{cases}$$

Produit nul $\Updownarrow$ un des facteurs est nul

$$\iff \begin{cases} 2x\,(y^2-2) = 0 \\ 2y\,(x^2-1) = 0 \end{cases}$$

Quatre combinaisons de facteurs nuls possibles

$$\iff \begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} 2x = 0 \\ x^2 - 1 = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y^2 - 2 = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y^2 - 2 = 0 \\ x^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

systèmes sans solution

$$\nabla f(x,y) = 0 \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} (y+\sqrt{2})(y-\sqrt{2}) = 0 \\ (x+1)(x-1) = 0 \end{cases}$$

même chose

$$\iff (x,y) \in \{(0,0),\ (1,\sqrt{2}), (1,-\sqrt{2}), (-1,\sqrt{2}), (-1,-\sqrt{2})\}$$

On a donc 5 points critiques. Calculons la hessienne en ces points.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2y^2 - 4, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4xy, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x^2 - 2.$$

$$\mathrm{Hess} f_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 2y^2 - 4 & 4xy \\ 4xy & 2x^2 - 2 \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad \mathrm{Hess} f_{(0,0)} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de $\mathrm{Hess} f_{(0,0)}$ est positif et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) < 0$ donc f atteint un maximum local en $(0,0)$.

Alternativement : les 2 valeurs propres sont négatives donc $\mathrm{Hess} f_{(0,0)}$ est définie négative : f atteint un maximum local en $(0,0)$.

En $(1,\sqrt{2})$ et $(-1,-\sqrt{2})$: $\mathrm{Hess}\, f_{(1,\sqrt{2})} = \mathrm{Hess}\, f_{(-1,-\sqrt{2})} = \begin{pmatrix} 0 & 4\sqrt{2} \\ 4\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$

Le déterminant de $\mathrm{Hess}\, f_{(1,\sqrt{2})}$ est négatif (strictement) donc f a un point selle en $(1,\sqrt{2})$ (et en $(-1,-\sqrt{2})$).

En $(-1,\sqrt{2})$ et $(+1,-\sqrt{2})$ la hessienne vaut $\begin{pmatrix} 0 & -4\sqrt{2} \\ -4\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$: on a aussi des points selle.

On a identifié les points critiques, parmi lesquels un maximum local et quatre points selle. Le maximum local est-il absolu ? $f(0,0) = 0$, or $f(2,2) = 4$: il ne s'agit pas d'un maximum global. La fonction n'a donc pas de maximum global. (En fait, elle n'est pas majorée : pour $t \in \mathbb{R}$, $f(t,t) = t^4 - 3t^2$ ce qui tend vers l'infini quand t tend vers l'infini).