Exercice 3, feuille 3

$(\mathcal{P}_7)$ Le problème est sous forme standard. On ne connaît pas de sommet a priori. Rappelons que les méthodes de l'ex 7 de la feuille 2 sont coûteuses en temps : une façon plus rapide est de résoudre un premier problème d'optimisation linéaire qui trouve un sommet, avant de résoudre le $(\mathcal{P}_7)$ à partir de ce sommet.

$$(\mathcal{P}_7) : \begin{cases} \text{Max } 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 6 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 8 \\ 4x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 = 10 \\ x_i \geq 0 \quad \forall i \end{cases}$$

Problème auxiliaire :
$$\begin{cases} \text{Max } \boxed{-s_1 - s_2 - s_3} \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + s_1 = 6 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + s_2 = 8 \\ 4x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 + s_3 = 10 \\ x_i \geq 0 \, \forall i, \; s_j \geq 0 \, \forall j. \end{cases}$$

Pour tout $(x_1, x_2, x_3, x_4, s_1, s_2, s_3) \geq 0$, $-s_1 - s_2 - s_3 \leq 0$.
Cette fonction est nulle si et seulement si $s_1 = s_2 = s_3 = 0$
Dans ce cas, (x_1, x_2, x_3, x_4) appartient à l'ensemble admissible de $(\mathcal{P}_7)$. Ainsi :

- si le max est 0, on trouve un sommet (x_1, x_2, x_3, x_4) du polyèdre de $(\mathcal{P}_7)$
- si le max est strictement négatif, il n'existe pas de point dans le polyèdre de $(\mathcal{P}_7)$: $(\mathcal{P}_7)$ n'a donc pas de solution.

Résolvons le problème auxiliaire :
$(0,0,0,0,6,8,10)$ est un sommet, associé à la base (s_1, s_2, s_3).

0	0	0	0	−1	−1	−1	0	
1	2	1	1	1	0	0	6	s_1
1	1	1	2	0	1	0	8	s_2
4	1	1	5	0	0	1	10	s_3

La première ligne n'est pas le vecteur des coûts réduits. Pour s'y ramener, il faut annuler les coefficients non nuls au-dessus des colonnes de s_1, s_2, s_3 (la base d'indices du sommet actuel), par des opérations de la forme $L_0 \leftarrow L_0 + \alpha L_i$.
Ici : $L_0 \leftarrow L_0 + L_1 + L_2 + L_3$.

$\boxed{6}$	4	3	8	0	0	0	24	
1	2	1	1	1			6	s_1
1	1	1	2		1		8	s_2
$\boxed{4}$	1	1	5			1	10	s_3

Maintenant, nous pouvons appliquer l'algorithme.
On choisit la première colonne (par exemple) puis comme $\frac{10}{4} \leq \frac{6}{1}$, $\frac{10}{4} \leq \frac{8}{1}$ on choisit le pivot encadré.

6	4	3	8	0	0	0	24		
1	2	1	1	1			6	s_1	
1	1	1	2	0	1	0	8	s_2	
$\boxed{1}$	1/4	1/4	5/4			1/4	5/2	x_1	$L_3 \leftarrow \frac{1}{4} L_3$

Puis on élimine les autres coefficients de la colonne : en3f3

0	5/2	3/2	1/2	0	0	−3/2	9		$L_0 \leftarrow L_0 - 6L_3$
0	7/4	$\boxed{3/4}$	−1/4	1	0	−1/4	7/2	s_1	$L_1 \leftarrow L_1 - L_3$
0	3/4	3/4	3/4	0	1	−1/4	11/2	s_2	$L_2 \leftarrow L_2 - L_3$
1	1/4	1/4	5/4	0	0	1/4	5/2	x_1	

On choisit de nouveau une colonne et le pivot associé.

0	5/2	$\boxed{3/2}$	1/2	0	0	−3/2	9		
0	7/3	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{14}{3}$	x_3	$L_1 \leftarrow \frac{4}{3} L_1$
0	3/4	$\boxed{3/4}$	3/4	0	1	−1/4	11/2	s_2	
1	1/4	$\boxed{1/4}$	5/4	0	0	1/4	5/2	x_1	

Enfin on élimine les coefficients encadrés :

0	−1	0	1	−2	0	−1	2		$L_0 \leftarrow L_0 - \frac{3}{2} L_1$
0	7/3	1	$-\frac{1}{3}$	4/3	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{14}{3}$	x_3	
0	−1	0	1	−1	1	0	2	s_2	$L_2 \leftarrow L_2 - \frac{3}{4} L_1$
1	$-\frac{1}{3}$	0	$\boxed{4/3}$	−1/3	0	1/3	4/3	x_1	$L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{4} L_1$

On continue avec le nouveau pivot :

0	−1	0	1	−2	0	−1	2		
0	7/3	1	−1/3	4/3	0	−1/3	14/3	x_3	
0	−1	0	1	−1	1	0	2	s_2	
$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	1	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	x_4	$L_3 \leftarrow \frac{3}{4} L_3$

et

$-\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{4}$	0	0	$-\frac{7}{4}$	0	$-\frac{5}{4}$	1		$L_0 \leftarrow L_0 - L_3$
$\frac{1}{4}$	9/4	0	0	5/4	0	$-\frac{1}{4}$	5	x_3	$L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1}{3} L_3$
−3/4	−3/4	0	0	−3/4	1	−1/4	1	s_2	$L_2 \leftarrow L_2 - L_3$
3/4	−1/4	0	1	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	x_4	

Tous les coefficients de la première ligne (sauf bien sûr la case en haut à droite) sont négatifs donc l'algorithme s'arrête. On a trouvé le maximum de $-s_1 - s_2 - s_3$ qui vaut -1 : ainsi, l'ensemble défini par les contraintes de (P_7) est vide.

(P_8) : même démarche. Les calculs seront présentés plus rapidement. On cherche d'abord un premier sommet en résolvant

$$\begin{cases} \text{Max } -s_1 - s_2 - s_3 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 + s_1 = 3 \\ x_1 + x_3 + 2x_4 + s_2 = 5 \\ 4x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + s_3 = 7 \\ x_i \geq 0,\ s_j \geq 0\ \forall i,j. \end{cases}$$

0	0	0	0	-1	-1	-1	0	
1	2	0	1	1	0	0	3	s_1
1	0	1	2	0	1	0	5	s_2
4	1	1	2	0	0	1	7	s_3

Annuler les coordonnées entourées :

6	3	2	5	0	0	0	15	
1	2	0	1	1	0	0	3	s_1
1	0	$\boxed{1}$	2	0	1	0	5	s_2
4	1	1	2	0	0	1	7	s_3

On choisit une colonne et un pivot associé :

On annule la colonne.

4	3	0	1	0	-2	0	5		$L_0 \leftarrow L_0 - 2L_2$
1	$\boxed{2}$	0	1	1	0	0	3	s_1	
1	0	1	2	0	1	0	5	x_3	
3	1	0	0	0	-1	1	2	s_3	$L_3 \leftarrow L_3 - L_2$

On choisit encore une colonne et son pivot, et on recommence :

$5/2$	0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	-2	0	$1/2$		$L_0 \leftarrow L_0 - \frac{3}{2}L_1$
$1/2$	1	0	$1/2$	$1/2$	0	0	$3/2$	x_2	$L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1$
1	0	1	2	0	1	0	5	x_3	
$\boxed{\frac{5}{2}}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	1	$1/2$	s_3	$L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{2}L_1$

Une fois de plus :

0	0	0	0	-1	-1	-1	0		$L_0 \leftarrow L_0 - L_3$
0	1	0	$3/5$	$3/5$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$7/5$	x_2	$L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{5}L_3$
0	0	1	$11/5$	$1/5$	$7/5$	$-\frac{2}{5}$	$24/5$	x_3	$L_2 \leftarrow L_2 - \frac{2}{5}L_3$
1	0	0	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	x_1	$L_3 \leftarrow \frac{2}{5}L_3$

L'algorithme est terminé : on trouve un maximum égal à 0 en $\left(\frac{1}{5}, \frac{7}{5}, \frac{24}{5}, 0, 0, 0, 0\right)$.

Cela signifie que $\left(\frac{1}{5}, \frac{7}{5}, \frac{24}{5}, 0\right)$ est un sommet du polyèdre de (P_8).

On démarre la deuxième phase de l'algorithme :

1	1	-3	0	0	
0	1	0	$3/5$	$7/5$	x_2
0	0	1	$11/5$	$24/5$	x_3
1	0	0	$-1/5$	$1/5$	x_1

vecteur de la fonction objectif

sommet actuel

On commence par annuler les coordonnées de la première ligne dans les colonnes correspondant à x_1, x_2, x_3 (base d'indices actuelle) :

0	0	0	$+31/5$	$64/5$	
0	1	0	$3/5$	$7/5$	x_2
0	0	1	$\boxed{11/5}$	$24/5$	x_3
1	0	0	$-1/5$	$1/5$	x_1

$L_0 \leftarrow L_0 - L_3 - L_1 + 3L_2$

nouveau pivot

0	0	$-\frac{31}{11}$	0	$-8/11$		$L_0 \leftarrow L_0 - \frac{31}{11} L_2$
0	1	$-3/11$	0	$1/11$	x_2	$L_1 \leftarrow L_1 - \frac{3}{11} L_2$
0	0	$5/11$	1	$24/11$	x_4	$L_2 \leftarrow 5/11\, L_2$
1	0	$\frac{1}{11}$	0	$7/11$	x_1	$L_3 \leftarrow L_3 + \frac{1}{11} L_2$

L'algorithme s'arrête. Le maximum de $x_1 + x_2 - 3x_3$ sous les contraintes de $(\mathcal{P}_7)$ est donc $8/11$, qui est atteint en $\left(7/11,\ 1/11,\ 0,\ 24/11\right)$.