Exercice 2, feuille 3

$(\mathcal{P}_S)$: Le problème est sous forme standard. Le point $(0,0,0,0,1,0)$ est un sommet (associé à la base d'indices $B = \{5\}$) et la fonction objectif est nulle en ce point. Le vecteur des coûts réduits associé est $c = (1,1,0,0,0,-1)$ (car c_B est nul).

On peut donc écrire le tableau :

$$\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \end{array} \quad x_5$$

et commencer l'algorithme.

Une autre façon de voir les choses : $(\mathcal{P}_S)$ est le problème sous forme standard auquel on serait arrivé en partant de $\begin{cases} \text{Max } x_1 + x_2 - x_6 \\ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_6) \in \mathbb{R}^5 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + x_6 \leq 1 \end{cases}$ en ajoutant x_5 en variable d'écart.

Cette méthode (partir d'une forme canonique et ajouter des variables d'écart) garantit que le vecteur des coûts réduits associé au sommet associé aux variables d'écart est c. En général, ce n'est pas automatique : c n'est pas le vecteur des coûts réduits qui doit être en haut à gauche du tableau. Une manière algorithmique de le calculer est la suivante : écrire

$$\begin{array}{c|c} c & 0 \\ \hline A & b \end{array}.$$

À l'aide d'opérations de la forme $L_0 \leftarrow L_0 + \alpha L_i$, $i \in \{1, \dots, m\}$, annuler les coordonnées de c qui correspondent à la base d'indices B. C'est ce qu'on fait lorsqu'on part d'un sommet quelconque d'un problème standard.

Résolution :

$$\begin{array}{cccccc|cl}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & & \\
\hline
\boxed{1} & 2 & 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & x_5
\end{array}$$

On choisit le coefficient entouré comme pivot :

$$\begin{array}{cccccc|cl}
0 & -1 & -1 & -3 & -1 & -2 & -1 & L_0 \leftarrow L_0 - L_1 \\
\hline
1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & x_1
\end{array}$$

Tous les coefficients de la première ligne sont négatifs. Le maximum est donc 1, atteint en $(1, 0, 0, 0, 0, 0)$.

$(\mathcal{P}_6)$: Le problème est donné sous forme canonique. On ajoute des variables d'écart x_7, x_8 :

$$(\mathcal{P}_6') : \begin{cases} \text{Max } 4x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 1 \\ 5x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_8 = 1 \\ x_i \geq 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, 8\} \end{cases}$$

On peut appliquer l'algorithme en partant du sommet $(0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1)$:

$$\begin{array}{cccccccc|cl}
4 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \\
\hline
1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & x_7 \\
5 & 4 & \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & x_8
\end{array}$$

On choisit une colonne et un pivot. $\left(\frac{1}{1} = \frac{1}{1}, \text{ choix possible}\right)$

$$\begin{array}{cccccccc|cl}
-6 & -7 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & -2 & -2 & L_0 \leftarrow L_0 - 2L_1 \\
\hline
-4 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & x_7 \quad L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\
5 & 4 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & x_3
\end{array}$$

Tous les coefficients de la 1ère ligne étant négatifs, on s'arrête. Le maximum est 2, atteint en $(0, 0, 1, 0, 0, 0)$.