Exercice 13

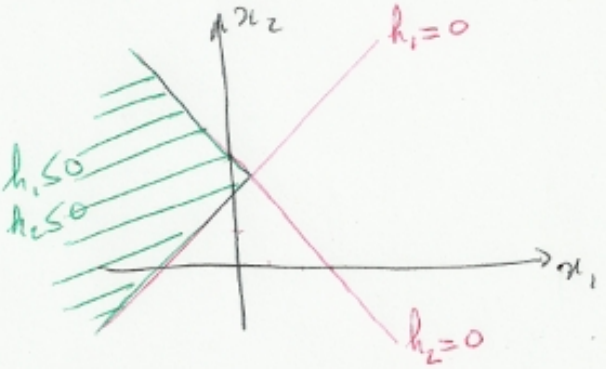
Nous allons utiliser le théorème de Karush-Kuhn-Tucker

Ici nous n'avons pas de contrainte d'égalité seulement deux contraintes d'inégalité qu'on peut écrire $h_1 \leq 0$ $h_2 \leq 0$

si $h_1(x_1, x_2) = x_1 - x_2 + 2$

$h_2(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - 3$.

On peut dessiner le domaine défini par ces contraintes



Les gradients de h_1, h_2 et φ sont :

$$\nabla h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \nabla h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \nabla \varphi = \begin{pmatrix} 3x_1^2 + 8x_1 + 5 \\ -2x_2 + 4 \end{pmatrix}$$

Comme les gradients de h_1 et h_2 sont linéairement indépendants la contrainte est partout qualifiée.

Si φ a un minimum en (x_1, x_2) sous la contrainte $h_1 \leq 0$ $h_2 \leq 0$ alors il existe $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}_+$ tq

$$\nabla \varphi + \mu_1 \nabla h_1 + \mu_2 \nabla h_2 = 0 \qquad \text{en } (x_1, x_2)$$

avec $\mu_i = 0$ si $h_i < 0$.

Il faut étudier les différents cas possibles pour l'annulation ou non des h_i

* $h_1 < 0$ $h_2 < 0$ (on se trouve à l'intérieur du domaine)

Pour qu'il puisse y avoir un minimum il faut que

$$\nabla \varphi (x_1, x_2) = 0 \qquad ((x_1, x_2) \text{ point critique})$$

soit $\begin{cases} 3x_1^2 + 8x_1 + 5 = 0 \\ -2x_2 + 4 = 0 \\ h_1 < 0 \quad h_2 < 0 \end{cases}$ ou encore $\begin{cases} (3x_1+5)(x_1+1) = 0 \\ x_2 = 2 \\ h_1 < 0 \quad h_2 < 0 \end{cases}$

ce qui donne les conditions $\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 2 \\ h_1(x_1, x_2) < 0 \quad h_2(x_1, x_2) < 0 \end{cases}$

$-1 - 2 + 2 < 0 \qquad -1 + 2 - 3 < 0$

ou $\begin{cases} x_1 = -\frac{5}{3} \\ x_2 = 2 \\ h_1(x_1, x_2) < 0 \quad h_2(x_1, x_2) < 0. \end{cases}$

$-\frac{5}{3} - 2 + 2 < 0 \qquad -\frac{5}{3} + 2 - 3 < 0$

Les deux points $(-1, 2)$ $(-\frac{5}{3}, 2)$ remplissent les conditions.

* $h_1 = 0 \quad h_2 < 0$ (on se trouve sur l'une des demi-droites formant le bord du domaine défini par les contraintes)

Pour qu'il puisse y avoir un minimum en (x_1, x_2) il faut qu'il existe $\mu_1 \geq 0$ tq

$$\begin{cases} \nabla \varphi + \mu_1 \nabla h_1 = 0 \\ h_1 = 0, \; h_2 < 0 \end{cases}$$

Cela donne le système suivant

$$\begin{cases} 3x_1^2 + 8x_1 + 5 + \mu_1 = 0 & (1) \\ -2x_2 + 4 - \mu_1 = 0 & (2) \\ x_1 - x_2 + 2 = 0 & (3) \\ x_1 + x_2 - 3 < 0 & (4) \end{cases}$$

De (2) on tire $\mu_1 = 4 - 2x_2$ (*)

Mais (3) donne $x_1 = x_2 - 2$. soit $-2x_1 = 4 - 2x_2$

(*) s'écrit alors $\mu_1 = -2x_1$

En remplaçant μ_1 par $(-2x_1)$ dans (1) on obtient

$0 = 3x_1^2 + 8x_1 + 5 - 2x_1 = 3x_1^2 + 6x_1 + 5$.

Or cette équation n'est jamais satisfaite pour $x_1 \in \mathbb{R}$ (le discriminant est négatif)

Il n'y a donc pas de point de l'ensemble défini par $h_1=0$, $h_2<0$ où φ puisse être minimum.

* $h_1<0$ $h_2=0$. (on se trouve sur l'autre demi-droite définissant le bord du domaine).

Pour qu'il puisse y avoir un minimum en (x_1, x_2) il faut qu'il existe $\mu_2 \geq 0$ tq

$$\begin{cases} \nabla\varphi + \mu_2 \nabla h_2 = 0 \\ h_1 < 0,\ h_2 = 0 \end{cases}$$

ce qui donne le système

$$\begin{cases} 3x_1^2+8x_1+5+\mu_2 = 0 & (1) \\ -2x_2+4+\mu_2 = 0 & (2) \\ x_1+x_2-3 = 0 & (3) \\ x_1-x_2+2 < 0 & (4) \end{cases}$$

(2) et (3) permettent d'exprimer μ_2 en fonction de x_1

$$\mu_2 = -4+2x_2 = -4+2(3-x_1) = -4+6-2x_1 = 2-2x_1$$

En remplaçant μ_2 par cette valeur dans (1) on obtient

$$0 = 3x_1^2+8x_1+5+2-2x_1 = 3x_1^2+6x_1+7$$

Cette équation n'a pas de solution réelle.

Nous n'obtenons donc pas de nouveau point candidat.

* $h_1 = h_2 = 0$.

On se trouve alors au sommet du domaine.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2 = 0 \\ x_1 + x_2 - 3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x_1 - 1 = 0 \\ +2x_2 - 5 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 1/2 \\ x_2 = 5/2 \end{cases}.$$

Les seuls points où φ peut avoir un minimum sous les contraintes $h_1 \leq 0$ $h_2 \leq 0$ sont :

$(-1, 2)$ $(-5/3, 2)$ $(1/2, 5/2)$.

En raisonnant de la même façon avec $-\varphi$ à la place de φ, on voit que ce sont aussi les seuls points où φ peut avoir un maximum.

Calculons les valeurs de φ en ces trois points

$$\varphi(-1,2) = (-1)^3 + 4(-1)^2 - 2^2 + 5\times(-1) + 4\times 2 = 2$$

$$\varphi(-5/3, 2) = \left(-\frac{5}{3}\right)^3 + 4\left(\frac{-5}{3}\right)^2 - 4 + 5\left(-\frac{5}{3}\right) + 8 = \frac{58}{27}$$

$$\varphi(1/2, 5/2) = \frac{1}{8} + 1 - \frac{25}{4} + \frac{5}{2} + 10 = \frac{59}{8}$$

Mais le domaine d'étude n'est pas compact. Il faut voir ce qui se passe lorsqu'on s'éloigne à l'infini.

Dans le domaine $\quad x_1 + 2 \leq x_2 \leq 3 - x_1$

Pour $x_1 < 0$ cela donne en particulier $|x_2| < 3 - x_1$

On en déduit que

$$\varphi(x_1, x_2) \leq x_1^3 + 4x_1^2 + (3-x_1)^2 + 5x_1 + 4(3-x_1)$$

$$\xrightarrow[x_1 \to -\infty]{} -\infty$$ (c'est le cube qui l'emporte).

Autrement dit φ tend vers $-\infty$ lorsque (x_1, x_2) tend vers l'infini (en restant dans le domaine défini par les contraintes)

signifie que $|x_1| + |x_2| \to +\infty$ ou $\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \to +\infty$.

De cette propriété on déduit que φ n'a pas de minimum sur le domaine $h_1 \leq 0$, $h_2 \leq 0$ mais a un maximum.

Le maximum est atteint en l'un des trois points trouvés ; la plus grande des trois valeurs en ces trois points est $\frac{59}{8}$.

Conclusion.

φ n'a pas de minimum sous contraintes

$$x_2 - x_1 \geq 2 \ , \ x_1 + x_2 \leq 3$$

φ a $59/8$ pour maximum sous ces contraintes atteint au point $(1/2, 5/2)$.

Remarque 1 : On peut aussi étudier la nature des points critiques.

$$\text{Hess}\,\varphi = \begin{pmatrix} 6x_1 + 8 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Hess}\,\varphi(-1,2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$ φ a un pt selle en $(-1,2)$

$$\text{Hess}\,\varphi(-5/3, 2) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$ φ a un maximum local en $(-5/3, 2)$.

Remarque 2 Plutôt que d'utiliser le théorème de KKT on aurait pu rechercher les points critiques de φ puis étudier φ sur le bord du domaine (en remplaçant x_2 par sa valeur en fonction de x_1 on obtient une fonction de x_1 seulement)