exercice 12, feuille n°4

On veut maximiser la somme des fonctions d'utilité :

$$f(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i^{\alpha}.$$

$\underline{x} \in \mathbb{R}_+^n$

La somme des revenus est constante :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = R \quad ; \quad g(\underline{x}) := \sum_{i=1}^{n} x_i - R$$ doit être nulle.

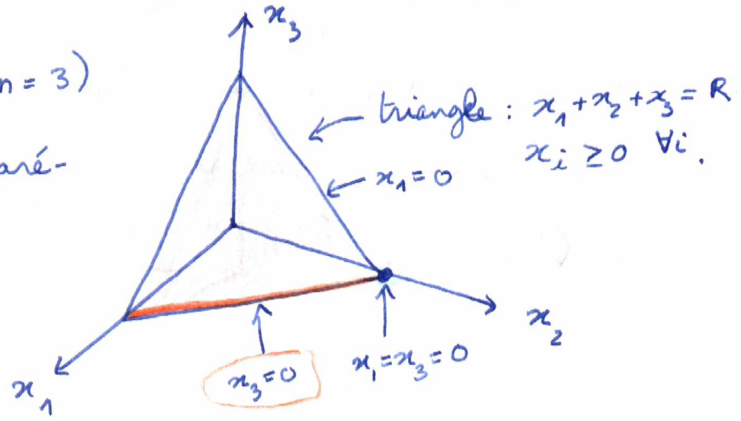
On peut supposer $\alpha > 0$. En effet :

- si $\alpha < 0$, $u \longmapsto u^{\alpha}$ est décroissante. Peu convaincant pour une fonction d'utilité. De plus, dans ce cas, f n'est pas majorée : si $x_1 = M^{\frac{1}{\alpha}}$ pour $M \in \mathbb{R}_+^*$, alors $f(\underline{x}) \geq M$.
- si $\alpha = 0$, les utilités valent toutes 1 et $f(\underline{x}) = n$ quel que soit le partage.

L'ensemble $\{\underline{x} \in \mathbb{R}_+^n \mid g(\underline{x}) = 0\}$ est un compact (c'est un simplexe). Ainsi, le maximum de f existe et est atteint sur l'ensemble défini par les contraintes.

Dessin dans $\mathbb{R}^3$ $(n = 3)$

On doit étudier séparément l'intérieur du triangle et ses bords.



En dimension supérieure, le triangle est un simplexe plus gros. Les <u>faces</u> du simplexe sont des simplexes de dimension plus petites, elles appartiennent au bord. Une face est définie par un ensemble de coordonnées qui sont nulles sur cette face (voir la figure)

Cherchons les maxima locaux liés dans l'intérieur :

$S_{int} := \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n \,/\, x_i > 0 \ \forall i \ , \sum_{i=1}^{n} x_i = R \}$ (aucune coordonnée nulle).

On peut chercher les points qui satisfont les conditions de Lagrange avec $g(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i - R$ et f sur $(\mathbb{R}_+^*)^n$

(f n'est pas définie ailleurs que sur $(\mathbb{R}_+)^n$)

On vérifie $\nabla g \neq 0$ sur S_{int} : $\nabla g = (1, 1, \dots, 1) \neq 0$ sur $\mathbb{R}^n$ donc sur S_{int}. D'après le théorème de Lagrange, les points qui sont de possibles maxima liés vérifient

$$\begin{cases} x_1 + \dots + x_n = R \\ \alpha x_1^{\alpha-1} = \lambda \\ \vdots \\ \alpha x_n^{\alpha-1} = \lambda \end{cases} \quad \text{pour un } \lambda \in \mathbb{R}.$$

$\nabla f(\underline{x}) = (\alpha x_1^{\alpha-1}, \dots, \dots)$

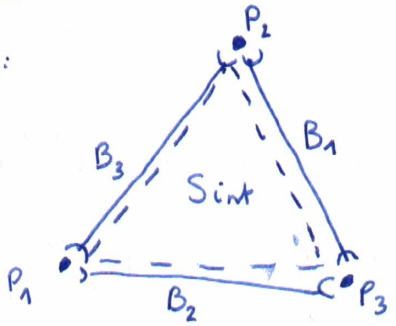
Ces conditions imposent $x_1 = x_2 = \dots = x_n = R/n$.

On ne connaît pas la nature de $(R/n, \dots, R/n)$ mais on peut calculer f en ce point.

$$f(R/n, R/n, \dots, R/n) = \boxed{n^{1-\alpha} R^{\alpha}}$$

Comme lors de la recherche d'extrema (non liés), le maximum peut être atteint sur S_{int} ou sur le bord. Le bord est réunion de simplexes ouverts et de points :

exemple :



$$B_1 = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = R,\ x_1 = 0,\ x_2 > 0,\ x_3 > 0 \}$$
$$\simeq \{ \underset{(x_2, x_3)}{\underline{x} \in \mathbb{R}^2} \mid x_2 + x_3 = R,\ x_2, x_3 > 0 \}$$

Soit F une face du simplexe : sur F, il y a $n-k$ coordonnées nulles et k non nulles. Quitte à échanger les x_i (f et g sont symétriques !) on peut supposer

$$x_1, \dots, x_k > 0 \quad , \quad x_{k+1}, \dots, x_n = 0 .$$

Chercher les extrema liés de F, c'est la même chose que chercher les extrema liés de $\tilde{f}(x_1, \dots, x_k) = \sum_{i=1}^{k} x_i^{\alpha}$ sous la contrainte $\tilde{g}(x_1, \dots, x_k) = \sum_{i=1}^{k} x_i - R$

(pareil qu'avant, mais dans $\mathbb{R}^k$ au lieu de $\mathbb{R}^n$!)

On connaît la réponse : le théorème de Lagrange donne un seul candidat : $(\underbrace{R/k, \dots, R/k}_{k \text{ coord}})$

qui correspond dans $\mathbb{R}^n$ à $(\underbrace{R/k, \dots, R/k}_{k}, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-k})$

et en ce point, f vaut $k^{1-\alpha} R^{\alpha}$.

On fait cela avec toutes faces : sur les faces de dim $n-k-1$ (i.e. avec k coordonnées non nulles) on a un point qui est possiblement le maximum sur la face, mais qui peut être aussi un minimum ou rien du tout.

En ces points : $f(R/k, \dots, R/k, 0, \dots, 0) = k^{1-\alpha} R^{\alpha}$

Pour $k=1$, on a des faces égales à des points : le point $(R, 0, \dots, 0)$ est seul dans sa face, donc il est un maximum local <u>dans sa face</u> (et vaut R^{α}).

Dans l'intérieur, le point candidat est $(R/n, \dots, R/n)$ et f y prend la valeur $n^{1-\alpha} R^{\alpha}$.

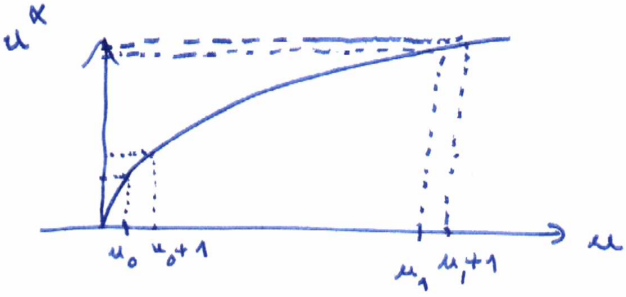
Le maximum de f <u>est atteint sur le simplexe</u>, soit dans S_{int}, soit dans l'intérieur d'une face (y compris sur un sommet). S'il est atteint dans S_{int}, alors il est au point trouvé, s'il est atteint dans F, aussi (il n'y a qu'un candidat par face). On a trouvé un nombre fini de points, il suffit de calculer f en chacun d'entre eux pour déterminer où est le maximum.

Deux cas :

- Si $\boxed{1-\alpha > 0}$, alors $n^{1-\alpha} > k^{1-\alpha}$ si $n > k$, alors <u>le max est atteint dans S_{int} en $(R/n, \dots, R/n)$ et vaut $n^{1-\alpha} R^{\alpha}$.</u>

  Cela correspond à partager les revenus équitablement.

Dans ce cas, la fonction d'utilité $u \mapsto u^\alpha$ est concave :



(ex : $u = u^{1/2} = \sqrt{u}$)

Interprétation « avec les mains » :

. Si j'ai u_0 et qu'on me donne 1, mon utilité augmente davantage que si j'ai u_1 et qu'on me donne 1.

Si on doit répartir l'argent entre n agents, un partage équitable est meilleur : au fur et à mesure qu'on distribue, il vaut mieux donner à ceux qui n'ont pas encore eu beaucoup pour maximiser somme des utilités. Cela rejoint le résultat du calcul.

– $\boxed{\text{Si } 1-\alpha < 0}$ alors $1 > k^{1-\alpha} > n^{1-\alpha}$ pour $1 \leq k < n$.

Ainsi, le max est atteint dans les points $(R, 0, \dots, 0), (0, R, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots 0, R)$ et vaut R^α. Cela correspond à tout donner à un seul agent. Traçons la fonction d'utilité : elle est convexe. Donner à ceux qui ont déjà beaucoup augmente davantage la somme des utilités : il vaut mieux tout donner à un seul.