Exercice 12

1) $f(x,y,z) = 2xyz$ est polynomiale donc continue.

2) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2yz \quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2xz \quad \dfrac{\partial f}{\partial z} = 2xy$

f a un point critique en (x,y,z) si $yz = xz = xy = 0$ (*)

Si $x \neq 0$ il faut que y et z soient nuls pour que (*) soit satisfait. De même si $y \neq 0$ il faut que x et z soient nuls et si $z \neq 0$ il faut que $x = y = 0$.

Les points critiques sont les points de la forme $(x,0,0)$, $(0,y,0)$, $(0,0,z)$.

En tous ces points critiques la fonction f s'annule. Pour tout $\varepsilon > 0$ on a si $x \neq 0$

$$f(x,\varepsilon,\varepsilon) = 2\varepsilon^2 x \qquad f(x,\varepsilon,-\varepsilon) = -2\varepsilon^2 x$$

de ces deux nombres l'un est positif l'autre est négatif.

f n'a donc ni maximum ni minimum en $(x,0,0)$.

Même chose aux points $(0,y,0)$ $(0,0,z)$ $y \neq 0$ $z \neq 0$

En $(0,0,0)$ $\quad f(\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon) = 2\varepsilon^3 > 0$

$\varepsilon > 0 \quad f(-\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon) = -2\varepsilon^2 < 0$

f n'a pas non plus de maximum ou de minimum en $(0,0,0)$

3) Oui, car la fonction est continue et l'ensemble sur lequel on l'étudie est un compact (c'est la boule fermée centrée en 0 de rayon 1).