

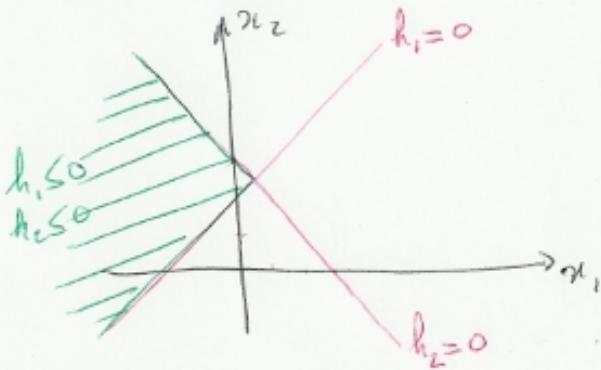
Nous allons utiliser le théorème de Karush-Kuhn-Tucker

Ici nous n'avons pas de contrainte d'égalité seulement deux contraintes d'inégalité qui on peut écrire $h_1 \leq 0$ $h_2 \leq 0$

$$\text{et } h_1(x_1, x_2) = x_1 - x_2 + 2$$

$$h_2(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - 3.$$

On peut dessiner le domaine défini par ces contraintes



Les gradients de h_1 , h_2 et φ sont :

$$\nabla h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \nabla h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \nabla \varphi = \begin{pmatrix} 3x_1^2 + 8x_1 + 5 \\ -2x_2 + 4 \end{pmatrix}$$

Comme les gradients de h_1 et h_2 sont linéairement indépendants la contrainte est partout qualifiée.

Si φ a un minimum en (x_1, x_2) sous la contrainte
 $h_1 \leq 0 \quad h_2 \leq 0$ alors il existe $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}_+$ tq

$$\nabla \varphi + \mu_1 \nabla h_1 + \mu_2 \nabla h_2 = 0 \quad \text{en } (x_1, x_2)$$

avec $\mu_i = 0$ si $h_i < 0$.

Il faut étudier les différents cas possibles pour l'annulation
 ou non des h_i :

* $h_1 < 0 \quad h_2 < 0$ (on se trouve à l'intérieur du domaine)

Pour qu'il puisse y avoir un minimum il faut que
 $\nabla \varphi(x_1, x_2) = 0$ ((x_1, x_2) point critique).

soit

$\begin{cases} 3x_1^2 + 8x_1 + 5 = 0 \\ -2x_2 + 4 = 0 \end{cases}$	ou encore	$\begin{cases} (3x_1 + 5)(x_1 + 1) = 0 \\ x_2 = 2 \end{cases}$
$h_1 < 0 \quad h_2 < 0$		$h_1 < 0 \quad h_2 < 0$

ce qui donne les conditions

on	$\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$	$\begin{cases} h_1(x_1, x_2) < 0 \\ h_2(x_1, x_2) < 0 \end{cases}$
	$\begin{cases} x_1 = -\frac{5}{3} \\ x_2 = 2 \end{cases}$	$\begin{cases} -1 - 2 + 2 < 0 \\ -\frac{5}{3} + 2 - 3 < 0 \end{cases}$
	$\begin{cases} h_1(x_1, x_2) < 0 \\ h_2(x_1, x_2) < 0 \end{cases}$	$\begin{cases} -\frac{5}{3} - 2 + 2 < 0 \\ -\frac{5}{3} + 2 - 3 < 0 \end{cases}$

Les deux points $(-1, 2)$ $(-\frac{5}{3}, 2)$ vérifient les conditions.

* $h_1 = 0 \quad h_2 < 0$ (on se trouve sur l'axe des demi-droites formant le bord du domaine défini par les contraintes)

Pour qu'il puisse y avoir un minimum en (x_1, x_2) il faut qu'il existe $\mu_i \geq 0$ tq

$$\begin{cases} \nabla \varphi + \mu_i \nabla h_i = 0 \\ h_1 = 0, \quad h_2 < 0 \end{cases}$$

Cela donne le système suivant

$$\begin{cases} 3x_1^2 + 8x_1 + 5 + \mu_1 = 0 & (1) \\ -2x_2 + 4 - \mu_1 = 0 & (2) \\ x_1 - x_2 + 2 = 0 & (3) \\ x_1 + x_2 - 3 < 0 & (4) \end{cases}$$

De (2) on tire $\mu_1 = 4 - 2x_2$ (1)

Plais (3) donne $x_1 = x_2 - 2$. Soit $-2x_1 = 4 - 2x_2$

(*) s'écrit alors $\mu_1 = -2x_1$

En remplaçant μ_1 par $(-2x_1)$ dans (1) on obtient

$$0 = 3x_1^2 + 8x_1 + 5 - 2x_1 = 3x_1^2 + 6x_1 + 5$$

On voit que cette équation n'est jamais satisfaite pour $x_1 \in \mathbb{R}$
(le discriminant est négatif)

Il n'y a donc pas de point de l'ensemble défini par $h_1=0, h_2<0$ où φ puisse être minimum.

* $h_1<0, h_2=0$. (on se trouve sur l'autre demi-droite définissant le bord du domaine).

Pour qu'il puisse y avoir un minimum en (x_1, x_2) il faut qu'il existe $\mu_2 \geq 0$ tq

$$\begin{cases} \nabla \varphi + \mu_2 \nabla h_2 = 0 \\ h_1 < 0, h_2 = 0 \end{cases}$$

a qui donne le système

$$\begin{cases} 3x_1^2 + 8x_1 + 5 + \mu_2 = 0 & (1) \\ -2x_2 + 4 + \mu_2 = 0 & (2) \\ x_1 + x_2 - 3 \leq 0 & (3) \\ x_1 - x_2 + 2 \leq 0 & (4) \end{cases}$$

(2) et (3) permettent d'exprimer μ_2 en fonction de x_1 .

$$\mu_2 = -4 + 2x_2 = -4 + 2(3 - x_1) = -4 + 6 - 2x_1 = 2 - 2x_1$$

En remplaçant μ_2 par cette valeur dans (1) on obtient

$$0 = 3x_1^2 + 8x_1 + 5 + 2 - 2x_1 = 3x_1^2 + 6x_1 + 7$$

Cette équation n'a pas de solution réelle.

Nous n'obtenons donc pas de nouveau point candidat.

$$\# h_1 = h_2 = 0 .$$

On se trouve alors au sommet du domaine.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2 = 0 \\ x_1 + x_2 - 3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x_1 - 1 = 0 \\ +2x_2 - 5 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 1/2 \\ x_2 = 5/2 \end{cases} .$$

Les seuls points où φ peut avoir un minimum sous les contraintes $h_1 \leq 0$ $h_2 \leq 0$ sont :

$$(-1, 2) \quad (-\frac{5}{3}, 2) \quad (\frac{1}{2}, \frac{5}{2}) .$$

En suivant de la même façon avec $-\varphi$ à la place de φ , on voit que ce sont aussi les seuls points où φ peut avoir un maximum.

Calculons les valeurs de φ en ces trois points

$$\varphi(-1, 2) = (-1)^3 + 4(-1)^2 - 2^2 + 5 \cdot 1 + 4 \cdot 2 = 2$$

$$\varphi\left(-\frac{5}{3}, 2\right) = \left(-\frac{5}{3}\right)^3 + 4\left(-\frac{5}{3}\right)^2 - 4 + 5\left(-\frac{5}{3}\right) + 8 = \frac{58}{27}$$

$$\varphi\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right) = \frac{1}{8} + 1 - \frac{25}{4} + \frac{5}{2} + 10 = \frac{59}{8}$$

Mais le domaine d'étude n'est pas compact. Il faut voir ce qui se passe lorsqu'on s'éloigne à l'infini.

Dans le domaine $x_1 + 2 \leq x_2 \leq 3 - x_1$

Pour $x_1 < 0$ cela donne en particulier $|x_2| < 3 - x_1$.

On en déduit que

$$\varphi(x_1, x_2) \leq x_1^3 + 4x_1^2 + (3-x_1)^2 + 5x_1 + 4(3-x_1)$$

$\xrightarrow[x_1 \rightarrow -\infty]{} -\infty$ (c'est la cube qui l'emporte).

Autrement dit φ tend vers $-\infty$ lorsque (x_1, x_2) tend vers l'infini (en restant dans le domaine défini par les contraintes).

Cela signifie que $|x_1| + |x_2| \rightarrow +\infty$ ou $\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \rightarrow +\infty$.

De cette propriété on déduit que φ n'a pas de minimum sur le domaine $b_1 \leq 0, b_2 \leq 0$ mais a un maximum.

Ce maximum est atteint en l'un des trois points trouvés ; la plus grande des trois valeurs en ces trois points est $\frac{59}{8}$.

Conclusion.

φ n'a pas de minimum sous contrainte

$$x_2 - x_1 \geq 2, x_1 + x_2 \leq 3$$

φ a $\frac{5}{8}$ pour maximum sous ces contraintes
atteint au point $(\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$.

Remarque 1: On peut aussi étudier la nature des points
critiques.

$$\text{Hess } \varphi = \begin{pmatrix} 6x_1 + 8 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Hess } \varphi(-1, 2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \varphi \text{ a un pt sll en } (-1, 2)$$

$$\text{Hess } \varphi(-\frac{5}{3}, 2) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \varphi \text{ a un maximum local } \\ \text{en } (-\frac{5}{3}, 2).$$

Remarque 2 Plutôt que d'utiliser le théorème du KKT
on aurait pu rechercher les points critiques de φ puis
étudier φ sur le bord du domaine (en remplaçant x_2
par sa valeur en fonction de x_1 , on obtient une fonction de x_1 seulement).