DS2 (durée : 1h30)

Exercice 1. *(4 points)*
Résoudre le programme linéaire suivant en utilisant l'algorithme du simplexe :

$$\begin{cases} Max\ x_1 + x_2 + 3x_3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 10 \\ 3x_2 + x_3 \leq 6 \\ 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_i \geq 0, \text{ pour tout } i \end{cases}$$

Formuler le problème dual et donner sa solution.

Exercice 2. *(4 points)*
On considère la fonction ψ définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$\psi(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2^2 - 2x_3^2.$$

Trouver les extrema de ψ sur l'ensemble K défini par la contrainte

$$x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 \leq 1.$$

Exercice 3. *(4 points)*
On considère la fonction ϕ définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\phi(x_1, x_2) = x_1^2 + 5x_2^2 - 2x_1x_2 - 4x_1 - 4x_2$$

et l'ensemble C défini par les contraintes

$$x_2 - x_1 \geq 0, \quad x_1 \geq 0.$$

1. Dessiner l'ensemble C.
2. Montrer que ϕ n'a pas de maximum sur C.
4. On admet que ϕ a un minimum sur C. Trouver le point de C où ϕ est minimum.

Exercice 4. *(8 points)*
Sur une collection d'individus on observe des variables y_i et des variables explicatives (ou régresseurs) x_i, $i = 1, ...n$, chaque paire (y_i, x_i) représentant une expérience. On les arrange dans un tableau de la façon suivante :

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_{12} & \dots & x_{1p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n2} & \dots & x_{np} \end{pmatrix}.$$

Pour tout vecteur β, on définit l'erreur quadratique moyenne d'ajustement (ou erreur résiduelle) $S(\beta)$ comme

$$S(\beta)^2 = \frac{1}{n}\|y - X\beta\|^2 = \frac{1}{n}\sum_i (y_i - x_i\beta)^2.$$

1. *(Question préparatoire)* On considère la fonction de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^p$ définie par
$$f(\beta) = c + \langle b, \beta \rangle + \frac{1}{2} \langle A\beta, \beta \rangle$$
où c est une constante réelle, $b \in \mathbb{R}^p$, A est une matrice symétrique de taille $p \times p$. Montrer qu'on a
$$\nabla f(\beta) = b + A\beta \quad \text{et} \quad \text{Hess} f(\beta) = A.$$
2. Montrer que la fonction S est la fonctionnelle quadratique de la forme
$$c + \langle b, \beta \rangle + \frac{1}{2} \langle A\beta, \beta \rangle,$$
avec
$$c = \frac{1}{n} \|y\|^2, \quad b = -\frac{2}{n} \ {}^tXy, \quad A = \frac{2}{n} \ {}^tXX.$$
3. On suppose que ${}^tXX$ est inversible. Montrer que ${}^tXX$ est définie positive.
4. Montrer que S a un minimum global strict au point $\hat{\beta}$ donné par
$$\hat{\beta} = ({}^tXX)^{-1} . {}^tXy.$$