DS3 (durée : 1h30)

Exercice 1. On se donne un tableau $n \times n$ composé de nombres entiers positifs ou nuls (dont des 0). On dit que deux 0 sont indépendants s'ils ne sont pas sur la même ligne ni sur la même colonne. Soit m le nombre le plus grand possible de 0 deux à deux indépendants. Soit p le nombre le plus petit possible de traits (ligne ou colonne) qu'il faut pour recouvrir tous les 0 du tableau. Montrer que $m \leq p$.

Exercice 2. Résoudre le programme linéaire suivant en utilisant l'algorithme du simplexe :

$$\begin{cases} Max\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_2 + 2x_3 = 5 \\ x_i \geq 0,\ \text{pour tout } i \end{cases}$$

Exercice 3. On considère la fonction ϕ définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\phi(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 6x_2$$

et l'ensemble C défini par les contraintes

$$x_1 - x_2^2 \geq 0.$$

1. Dessiner l'ensemble C.
2. Montrer que ϕ n'a pas de maximum sur C mais a un minimum sur C.
3. Trouver les points critiques de ϕ. Les placer sur le dessin.
4. Trouver le point de C où ϕ est minimum.

Exercice 4. Quels sont les extrema de la fonction ϕ définie par

$$\phi(x_1, x_2) = x_1 - 2x_2 + 3$$

sur l'ensemble

$$E = \{(x_1, x_2)\ /\ x_2 \geq x_1^4 + 1\}\ ?$$

Exercice 5. Soit A une matrice définie positive de taille $d \times d$ et b un vecteur de $\mathbb{R}^d$. Montrer que la fonction

$$J(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle$$

a un unique minimum global en un point que l'on déterminera. (Calculer le gradient et la hessienne de J).