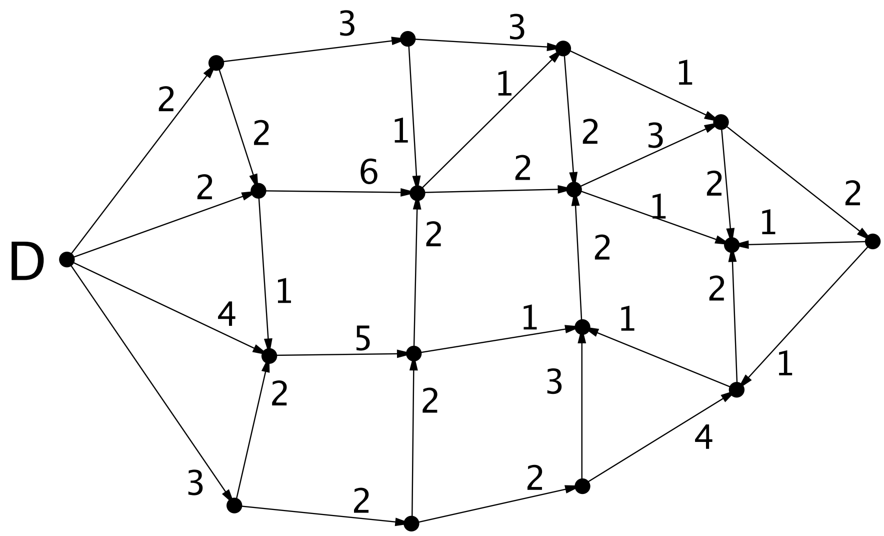
DS 3

Exercice 1. *(4 points)*
Trouver les chemins les plus courts joignant **A** à tous les autres sommets du graphe ci-dessous. Utiliser l'algorithme de Dijkstra.



Exercice 2. *(4 points)*
Résoudre le programme linéaire suivant en utilisant l'algorithme du simplexe :

$$\begin{cases} Max\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_2 + 2x_3 = 5 \\ x_i \geq 0, \text{ pour tout } i \end{cases}$$

Exercice 3. *(4 points)*
On considère la fonction ϕ définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\phi(x_1, x_2) = 5x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 - 4x_1 - 10x_2$$

et l'ensemble C défini par les contraintes

$$x_1 - x_2 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

1. Dessiner l'ensemble C.
2. Montrer que ϕ n'a pas de maximum sur C.
3. Montrer que ϕ a un minimum sur C (on pourra commencer par établir la minoration $\phi(x_1, x_2) \geq 3x_1^2 - 14x_1$ pour (x_1, x_2) élément de C).
4. Trouver le point de C où ϕ est minimum.

Exercice 4. *(4 points)*
On considère la fonction ψ définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$\psi(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 2x_2^2 + x_3.$$

Trouver les extrema de ψ sur l'ensemble K défini par la contrainte

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1.$$

Exercice 5. *(4 points)*
On considère la fonction de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(\beta) = c + \langle b, \beta \rangle + \frac{1}{2}\langle A\beta, A\beta \rangle$$

où c est une constante réelle, $b \in \mathbb{R}^p$, A est une matrice symétrique de taille $p \times p$.

1. Montrer qu'on a
$$\nabla f(\beta) = b + A^2\beta \quad \text{et} \quad \mathrm{Hess} f(\beta) = A^2.$$
2. On suppose que A est inversible. Montrer que A^2 est définie positive. Montrer que f a un minimum global strict en un point unique (à préciser).
3. On suppose que A n'est pas inversible. À quelle condition f a-t-elle un minimum global ? Montrer que si f a un minimum global, il est atteint en une infinité de points.