

DS 3

Exercice 1. (4 points)

Résoudre le programme linéaire suivant en utilisant l'algorithme du simplexe :

$$\begin{cases} \text{Max } 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 6 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 8 \\ x_i \geq 0, \text{ pour tout } i \end{cases}$$

Exercice 2. (4 points)

On considère la fonction ϕ définie sur \mathbb{R}^2 par

$$\phi(x_1, x_2) = x_2^3 - x_2^2 + x_1^2 + x_1 + x_2.$$

Trouver les extrema de ϕ sur l'ensemble C défini par les contraintes

$$x_2 + x_1 \geq 2, \quad x_2 - x_1 \geq 1.$$

Exercice 3. (4 points)

On considère la fonction ψ définie sur \mathbb{R}^3 par

$$\psi(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 2x_2x_3.$$

Trouver les extrema de ψ sur l'ensemble K défini par la contrainte

$$x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 \leq 1.$$

Exercice 4. (8 points)

Sur une collection d'individus on observe des variables y_i et des variables explicatives (ou régresseurs) x_i , $i = 1, \dots, n$, chaque paire (y_i, x_i) représentant une expérience. On les arrange dans un tableau de la façon suivante :

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_{12} & \dots & x_{1p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n2} & \dots & x_{np} \end{pmatrix}.$$

Pour tout vecteur β , on définit l'erreur quadratique moyenne d'ajustement (ou erreur résiduelle) $S(\beta)$ comme

$$S(\beta)^2 = \frac{1}{n} \|y - X\beta\|^2 = \frac{1}{n} \sum_i (y_i - x_i\beta)^2.$$

- (Question préparatoire) On considère la fonction de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R} définie par

$$f(\beta) = c + \langle b, \beta \rangle + \frac{1}{2} \langle A\beta, \beta \rangle$$

où c est une constante réelle, $b \in \mathbb{R}^p$, A est une matrice symétrique de taille $p \times p$. Montrer qu'on a

$$\nabla f(\beta) = b + A\beta \quad \text{et} \quad \text{Hess}f(\beta) = A.$$

2. Montrer que la fonction S est la fonctionnelle quadratique de la forme

$$c + \langle b, \beta \rangle + \frac{1}{2} \langle A\beta, \beta \rangle,$$

avec

$$c = \frac{1}{n} \|y\|^2, \quad b = -\frac{2}{n} {}^t X y, \quad A = \frac{2}{n} {}^t X X.$$

3. On suppose que ${}^t X X$ est inversible. Montrer que ${}^t X X$ est définie positive.
4. Montrer que S a un minimum global strict au point $\hat{\beta}$ donné par

$$\hat{\beta} = ({}^t X X)^{-1} \cdot {}^t X y.$$