

DS2 (durée 45 minutes)

Les exercices 1 et 2 sont indépendants. Les matrices A et b de ces exercices ne sont pas les mêmes.

Exercice 1. Soit A et b les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

On considère le polyèdre convexe $C(A, b)$ inclus dans \mathbb{R}^4 défini par

$$C(A, b) = \{x \in \mathbb{R}^4 / x \geq 0, Ax = b\}.$$

Trouver tous les points extrémaux de $C(A, b)$.

Exercice 2. Soit A une matrice $m \times n$ avec $m < n$ de rang maximal et b un vecteur $m \times 1$. On considère le polyèdre convexe $C(A, b)$ inclus dans \mathbb{R}^n défini par

$$C(A, b) = \{x \in \mathbb{R}^n / x \geq 0, Ax = b\}.$$

1. Rappeler la définition d'un point extrémal d'un convexe C .
2. Quelle est la dimension du noyau de A ? Justifier.
3. Montrer que si un point de $C(A, b)$ a plus que m coordonnées strictement positives (par exemples les $m + 1$ premières) alors ce n'est pas un point extrémal de $C(A, b)$.

Exercice 3. Déterminer les points critiques (c'est-à-dire les points où les deux dérivées partielles s'annulent) et la nature des points critiques de la fonction définie par $f(x, y) = x^2y^3 - 27x^2 - 2y^2$.