NOM : LE BORGNE **PRÉNOM : Stéphane**

Devoir 1 (14 février)

Une correction de deux questions de l'exercice 2.

Exercice 1. Programmation linéaire en dimension 2.

1. Donner la définition d'une ensemble convexe inclus dans $\mathbb{R}^2$.
   Rappelons la définition d'un ensemble convexe. Une partie C du plan est dite convexe si pour tous points $x = (x_1, x_2)$ $y = (y_1, y_2)$ de C, tout nombre réel λ dans $[0, 1]$, le point $\lambda x + (1 - \lambda)y$ appartient encore à C.
2. Dessiner la région du plan définie par les inégalités

$$1 \leq x_2 - x_1 \leq 6,\ x_1 \geq 0,\ 0 \leq x_1 + x_2 \leq 4.$$

3. Montrer que la région de la question précédente est convexe.
   Appelons C la région définie dans la question précédente. Prenons deux points $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ dans C, et un nombre réel λ dans $[0, 1]$. Les coordonnées du point $\lambda x + (1 - \lambda)y$ sont

$$\lambda x + (1 - \lambda)y = (\lambda x_1 + (1 - \lambda)y_1, \lambda x_2 + (1 - \lambda)y_2).$$

   Il faut montrer que ces coordonnées vérifient les inégalités définissant C. Comme x appartient à C, on a (en multipliant les inégalités par le nombre positif λ)

$$\lambda \leq \lambda x_2 - \lambda x_1 \leq 6\lambda,\ \lambda x_1 \geq 0,\ 0 \leq \lambda x_1 + \lambda x_2 \leq 4\lambda.$$

   Dela même façon pour y (et en multipliant par $(1 - \lambda)$ lui aussi positif)

$$(1-\lambda) \leq (1-\lambda)y_2-(1-\lambda)y_1 \leq 6(1-\lambda),\ (1-\lambda)y_1 \geq 0,\ 0 \leq (1-\lambda)y_1+(1-\lambda)y_2 \leq 4(1-\lambda).$$

   En additionnant termes à termes les inégalités correspondantes, on obtient

$$1 = \lambda + (1 - \lambda) \leq \lambda x_2 + (1 - \lambda)y_2 - \lambda x_1 - (1 - \lambda)y_1 \leq 6\lambda + 6(1 - \lambda) = 6,$$

$$\lambda x_1 + (1 - \lambda)y_1 \geq 0,$$

$$0 \leq \lambda x_1 + (1 - \lambda)y_1 + \lambda x_2 + (1 - \lambda)y_2 \leq 4\lambda + 4(1 - \lambda) = 4.$$

   Autrement dit les coordonnées du point $\lambda x + (1 - \lambda)y$ satisfont les inégalités ; le point $\lambda x + (1 - \lambda)y$ appartient donc bien à C.
4. Trouver graphiquement les points de cette région où la fonction $x \mapsto x_1 + 3x_2$ est minimale et maximale. Donner les valeurs minimale et maximale correspondantes.