NOM : LE BORGNE **PRÉNOM : Stéphane**

Devoir 1 (27 février)

Durée 45 minutes, calculatrices et documents interdits

Exercice 1. *Méthode hongroise* Résoudre le problème d'affectation défini par le tableau suivant en utilisant la méthode hongroise :

6	5	7	6	11	7
7	10	3	9	12	10
13	16	14	9	7	11
12	11	9	10	6	8
11	13	9	8	7	12
6	7	10	10	9	10

Je ne corrige pas cet exercice.

Exercice 2. *Convexité*

1. On considère la région C de $\mathbb{R}^3$ définie par les inégalités

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 1, \ 0 \leq x_1 \leq 1/2, \ 0 \leq x_2, \ 0 \leq x_3.$$

Trouver une matrice A et un vecteur b tels que

$$C = \{x \in \mathbb{R}^3 \ / \ Ax \leq b\}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. Donner la définition d'une partie convexe de $\mathbb{R}^3$. Montrer que C est convexe.
La partie C est convexe si, pour tous x et y éléments de C, pour tout $t \in [0,1]$, $tx+(1-t)y$ appartient aussi à C. Soient x et y deux éléments de C et $t \in [0,1]$. On a

$$A(tx + (1-t)y) = tAx + (1-t)Ay.$$

Or, comme x et y sont dans C, on a $Ax \leq b$ et $Ay \leq b$ et comme t et $1-t$ sont positifs ou nuls, $tAx \leq tb$ et $(1-t)Ay \leq (1-t)b$. On en déduit

$$A(tx + (1-t)y) = tAx + (1-t)Ay \leq tb + (1-t)b = b,$$

ce qui signifie que $tx + (1-t)y$ appartient C. L'ensemble C est bien convexe.

3. Rappeler la définition d'un point extrémal de C.
Un point x de C est extrémal si lorsque, pour un $\alpha \in]0,1[$, et deux points y et z de C, on a $x = \alpha y + (1-\alpha)z$, alors nécessairement $y = z = x$.

4. Montrer que si x, y, z sont trois points de C tels que

$$x_1 + x_2 = 1 \text{ et } x = \alpha y + (1-\alpha)z \text{ avec } \alpha \in]0,1[,$$

alors $y_1 + y_2 = z_1 + z_2 = 1$. Indication : que dire de x_3 si $x_1 + x_2 = 1$?
Par définition si x appartient à C on a $x_1 + x_2 + x_3 \leq 1$ et $x_3 \geq 0$. Si $x_1 + x_2 = 1$ on a donc $1 + x_3 \leq 1$, c'est-à-dire $x_3 \leq 0$ et $x_3 \geq 0$, donc $x_3 = 0$.
L'égalité $x = \alpha y + (1-\alpha)z$ signifie en particulier qu'on a $x_1 = \alpha y_1 + (1-\alpha)z_1$ et $x_2 = \alpha y_2 + (1-\alpha)z_2$. En faisant la somme de ces deux égalités, on obtient $x_1 + x_2 = \alpha(y_1+y_2)+(1-\alpha)(z_1+z_2)$, soit $1 = \alpha(y_1+y_2)+(1-\alpha)(z_1+z_2)$, qu'on peut réécrire sous la forme $0 = \alpha(y_1+y_2-1)+(1-\alpha)(z_1+z_2-1)$. Comme $\alpha > 0$, $1-\alpha > 0$, $y_1+y_2-1 \leq 0$, $z_1+z_2-1 \leq 0$, cela entraîne $y_1+y_2-1 = 0$, $z_1+z_2-1 = 0$, soit $y_1+y_2 = 1$, $z_1+z_2 = 1$.

5. Montrer que le point $(1/2, 1/2, 0)$ est extrémal dans C.
Le point $(1/2, 1/2, 0)$ appartient bien à C. On veut montrer que si y, z dans C et $\alpha \in]0,1[$ vérifient $(1/2,1/2,0) = \alpha y + (1-\alpha)z$ alors $y = z = (1/2,1/2,0)$. D'après la question précédente, si $(1/2,1/2,0) = \alpha y+(1-\alpha)z$, alors $y_1+y_2 = 1$, $z_1+z_2 = 1$ (car $1/2+1/2 = 1$) et donc aussi $y_3 = z_3 = 0$. Supposons que y_1 et y_2 ne soient pas tous les deux égaux à $1/2$. Alors l'un d'entre eux doit être strictement supérieur à $1/2$. Ce n'est pas y_1 par définition de C, donc $y_2 > 1/2$. Mais $1/2 = \alpha y_2 + (1-\alpha)z_2$. Si on réécrit cette égalité $0 = \alpha(y_2 - 1/2) + (1-\alpha)(z_2 - 1/2)$, comme $\alpha(y_2 - 1/2) > 0$, on voit que $z_2 - 1/2$ est négatif, autrement dit $z_2 < 1/2$. Mais alors $z_1 = 1 - z_2$ est strictement supérieur à $1/2$. Contradiction (z appartient à C). L'hypothèse $(y_1, y_2) \neq (1/2, 1/2)$ est absurde. On a nécessairement $(y_1, y_2) = (1/2, 1/2)$. On voit de la même façon que $(z_1, z_2) = (1/2, 1/2)$ aussi. On a donc montré que si $(1/2,1/2,0) = \alpha y + (1-\alpha)z$ pour un. $\alpha > 0$, alors $y = z = (1/2,1/2,0)$.