Théorème limite central presque sûr pour les marches aléatoires avec trou spectral

Quenched central limit theorem for random walks with a spectral gap

Jean-Pierre Conze, Stéphane Le Borgne

IRMAR, UMR 6625, Université de Rennes I, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex

Abstract

Let G be a semi-group of measure preserving transformations of a probability space $(X, \mathcal{B}, m)$ and let μ be a probability measure on G. We prove a quenched central limit theorem for functions in $L_0^p(m)$, $p > 2$, when the spectral gap condition holds for the diagonal action of G on $(X \times X, m \otimes m)$.

Résumé

Soit G un semi-groupe de transformations d'un espace probabilisé $(X, \mathcal{B}, m)$ préservant la mesure m et soit μ une mesure de probabilité sur G. Nous montrons un théorème limite central de type "quenched" pour les fonctions dans $L_0^p(X, m)$, $p > 2$, sous la condition de trou spectral pour l'action diagonale de G sur $(X \times X, m \otimes m)$.

Abridged english version

Let $(X, \mathcal{B}, m)$ be a metric space endowed with its Borel σ-algebra $\mathcal{B}$ and a probability m and let G be a locally compact group or semi-group of Borel maps of X into itself which preserve m. Let μ be a probability measure on G.

Let $(\Omega, \mathbb{P}) = (G^{\mathbb{N}^*}, \mu^{\mathbb{N}^*})$, $\omega = (\omega_1, \omega_2, ...)$. We denote by $g_k(\omega) := \omega_k$, $k \geq 1$, the coordinate maps. These data define a *random walk* on X with Markov operator P_μ defined by $P_\mu \varphi(x) = \int_G \varphi(gx)\, d\mu(g)$.

The operator corresponding to the diagonal action on $(X \times X, m \times m)$ is defined on $L^2(m \otimes m)$ by $\tilde{P}_\mu \varphi(x, y) := \int_G \varphi(gx, gy)\, d\mu(g)$. The measure m is a stationary probability for the associate Markov chain. For $p \geq 1$, P_μ is a contraction of $L^p(X, m)$ preserving the subspace $L_0^p(X, m)$ of functions φ

Email address: `jean-pierre.conze@univ-rennes1.fr, stephane.leborgne@univ-rennes1.fr` (Jean-Pierre Conze, Stéphane Le Borgne).

Preprint submitted to Elsevier Science *September 23, 2011*

in $L^p(X,m)$ such that $m(\varphi) = 0$. Let $P_{0,\mu}$ (resp. $\tilde{P}_{0,\mu}$) be the restriction of P_μ to $L_0^2(X,m)$ (resp. to $L_0^2(X \times X, m \otimes m)$).

We say that P_μ (resp. $\tilde{P}_\mu$) satisfies the spectral gap property if $\|P_{0,\mu}\| < 1$ (resp. $\|\tilde{P}_{0,\mu}\| < 1$). There are several situations where the spectral gap property holds for P_μ and $\tilde{P}_\mu$ (cf. [2], [3], [5], [6]). For example we have $\|\tilde{P}_{0,\mu}\| < 1$ for some groups of automorphisms of tori or nilmanifolds. We are interested in the behavior for a fixed ω of the ergodic sums defined by $S_n^\omega \varphi(x) = S_n\varphi(\omega, x) := \sum_{k=1}^n \varphi(g_k(\omega)\dots g_1(\omega)x)$.

It is known (cf. [5]) that, if P_μ has a spectral gap, then for every $\varphi \in L_0^2(m)$ the variance $\sigma^2(\varphi) := \lim \frac{1}{n}\int_{\Omega\times X}(S_n\varphi)^2 \, dm \, d\mathbb{P} = \int \varphi^2 \, dm + 2\sum_1^\infty \int_X \varphi(x)\, P_\mu^k\varphi(x) \, dm(x)$ exists, with $\sigma > 0$ if $\varphi(x)$ is not 0 for m-a.e. x. Moreover a central limit theorem holds with respect to the probability $\mathbb{P} \otimes m$ for the sums $S_n\varphi$. The main result of this note is the following quenched central limit theorem:

Theorem 0.1 *If $\|\tilde{P}_{0,\mu}\| < 1$, then, for every real function φ in $L_0^p(X,m)$, with $p > 2$, for a.e. $\omega \in \Omega$,*

$$\lim \frac{1}{n}\int_X |S_n^\omega\varphi(x)|^2 \, dm = \sigma^2(\varphi) \text{ and } \lim_{n\to\infty} m(x : \frac{1}{\sigma(\varphi)\sqrt{n}} S_n^\omega\varphi(x) < a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^a e^{-\frac{t^2}{2}} \, dt, \forall a \in \mathbb{R}.$$

1. Préliminaires

Soit $(X, \mathcal{B}, m)$ un espace métrique muni de sa tribu borélienne $\mathcal{B}$ et d'une probabilité m. Soient G un groupe ou un semi-groupe localement compact de transformations boréliennes de X préservant m et μ une mesure de probabilité sur G. Notons gx l'action de $g \in G$ sur un point $x \in X$. L'application $(g,x) \to gx$ est supposée mesurable. Ces données définissent une marche aléatoire sur X, d'opérateur de transition

$$P_\mu\varphi(x) = \int_G \varphi(gx)\, d\mu(g).$$

Notons $\mathbb{E}$ l'intégrale en ω par rapport à $\mathbb{P} = \mu^{\otimes\mathbb{N}^*}$ et $L_0^p(X,m)$, $1 \le p \le \infty$, le sous-espace de $L^p(X,m)$ des fonctions d'intégrale nulle. L'opérateur P_μ définit une contraction de $L^p(X,m)$ préservant $L_0^p(X,m)$. L'opérateur $\tilde{P}_\mu$ correspondant à l'action diagonale sur $(X\times X, m\times m)$ est $\tilde{P}_\mu\varphi(x,y) := \int_G \varphi(gx, gy)\, d\mu(g)$. Soient $P_{0,\mu}$ la restriction de P_μ à $L_0^2(X,m)$ et $\tilde{P}_{0,\mu}$ la restriction de $\tilde{P}_\mu$ à $L_0^2(X \times X, m \otimes m)$.

Nous dirons que P_μ (resp. $\tilde{P}_\mu$) a un trou spectral si $\|P_{0,\mu}\| < 1$ (resp. $\|\tilde{P}_{0,\mu}\| < 1$). Il y a plusieurs situations de nature algébrique pour lesquelles P_μ et $\tilde{P}_\mu$ vérifient la propriété de trou spectral, voir [2], [3], [5], [6]. C'est le cas, par exemple, pour certains groupes d'automorphismes de tores ou de nilvariétés.

Le système dynamique correspondant à la marche aléatoire est défini sur l'espace $(G^{\mathbb{N}^*} \times X, \mu^{\otimes\mathbb{N}^*} \otimes m)$ par $\theta_\tau : (\omega, x) \mapsto (\theta\omega, \tau(\omega)x)$, avec $\theta\,(\omega_k)_{k\ge1} = (\omega_{k+1})_{k\ge1}$ et $\tau(\omega)x = g_1(\omega)x$. En itérant nous obtenons :

$$\theta_\tau^n(\omega, x) = (\theta^n\omega, g_1^n(\omega)x), \text{ avec } g_1^n(\omega)x := g_n(\omega)\dots g_1(\omega)x.$$

Soit φ une fonction sur X. En la considérant comme fonction sur $\Omega \times X$, nous pouvons la composer par θ_τ^k. Nous nous intéressons à la distribution en x à ω fixé des sommes ergodiques définies par

$$S_n^\omega\varphi(x) = S_n\varphi(\omega, x) := \sum_{k=1}^n (\varphi \circ \theta_\tau^k)(\omega, x) = \sum_{k=1}^n \varphi(g_k(\omega)\dots g_1(\omega)x).$$

Il est connu (cf. [8]) que, si l'opérateur P_μ a un trou spectral, alors pour toute fonction $\varphi \in L_0^2(m)$ la variance asymptotique $\sigma^2(\varphi) := \lim \frac{1}{n} \int_{\Omega\times X} (S_n\varphi)^2 \, dm \, d\mathbb{P}$ existe et vaut

$$\sigma^2(\varphi) = \int_X \varphi^2(x) \, dm(x) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \int_X \varphi(x) \, P_\mu^k \varphi(x) \, dm(x).$$

D'autre part, par une méthode inspirée de [7] (voir aussi [5]), on peut montrer, pour toute fonction φ réelle dans $L_0^\infty(X, m)$, la majoration :

$$|\mathbb{E}_{\mathbb{P}\otimes m}(\exp(it\frac{S_n\varphi}{\sqrt{n}})) - \exp(\frac{1}{2}\sigma^2(\varphi)\, t^2)| \leq C \max_{j=3}^{5} \frac{\ln^{j-1}(n) \|\varphi\|_\infty^j}{n^{j/2-1}}, \forall n \geq 1. \tag{1}$$

Lemme 1.1 *Si $\|\tilde{P}_{0,\mu}\| < 1$, alors, pour toutes fonctions réelles φ, ψ dans $L_0^2(X, m)$, pour tout $\alpha > 0$, il existe une fonction K intégrable, telle que, pour presque tout ω, $\|S_n^\omega \varphi\|_2^2 \leq K(\omega)\, n^{1+\alpha} \, \|\varphi\|_2^2$ et*

$$|\|S_n^\omega \psi\|_2^2 - \|S_n^\omega \varphi\|_2^2| \leq K(\omega)\, n^{1+\alpha} \|\psi - \varphi\|_2 (\|\psi\|_2 + \|\varphi\|_2).$$

Preuve Montrons la première inégalité qui implique la seconde. Nous avons la majoration

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}|\int_X \varphi(g_1^{k+\ell}(\omega)x) \ \varphi(g_1^\ell(\omega)x) \, dm(x)| \leq (\mathbb{E}|\int_X \varphi(g_1^{k+\ell}(\omega)x) \ \varphi(g_1^\ell(\omega)x) \ dm(x)|^2)^{1/2} \\
&= \Big(\int_{X\times X} \tilde{P}_{0,\mu}^k (\varphi \otimes \varphi)(x,y) \, (\varphi\otimes\varphi)(x,y) \ dm(x) \ dm(y)\Big)^{1/2} \leq \|\tilde{P}_{0,\mu}\|^{k/2} \|\varphi\|_2^2.
\end{aligned}$$

Soit λ tel que $\|\tilde{P}_{0,\mu}\| < \lambda^2 < 1$. D'après ce qui précède, il existe une fonction K intégrable telle que

$$|\sum_{r=n^\alpha+1}^{n-1} \int_X \sum_{\ell=0}^{n-1-r} (\varphi\, \varphi\circ\theta_\tau^r)(\theta_\tau^\ell(\omega,x)) \, dm(x)| \leq K(\omega) \, \|\varphi\|^2 \, n \sum_{r=n^\alpha+1}^{n-1} \lambda^r.$$

Le résultat s'obtient à l'aide de ce qui précède, à partir du développement et de la majoration :

$$\|S_n^\omega \varphi\|_2^2 = n \int_X \varphi^2(x) \, dm(x) + 2 \sum_{r=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{n-r} \int_X \varphi(\theta_\tau^r(\omega,x)) \ \varphi(\theta_\tau^{r+\ell}(\omega,x)) \, dm(x),$$

$$|\sum_{r=1}^{n^\alpha} \int_X \sum_{\ell=0}^{n-1-r} (\varphi\, \varphi\circ\theta_\tau^r)(\theta_\tau^\ell(\omega,x)) \ dm(x)| \leq n^{1+\alpha} \|\varphi\|_2^2.$$

□

Montrons maintenant que, pour presque tout ω, la variance asymptotique à ω fixé est égale à la variance asymptotique $\sigma^2(\varphi)$. Dans la suite κ est une constante > 0. Etant donnée φ dans $L_0^p(X, m)$ avec $p > 2$, nous utilisons une suite $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ dans $L_0^\infty(X, m)$ telle que, pour une constante $C > 0$,

$$\|\varphi - \varphi_n\|_2^2 \leq C \frac{\|\varphi\|_p^p}{n^{\kappa(p-2)}}, \ \ \|\varphi_n\|_2 \leq \|\varphi\|_2, \ \|\varphi_n\|_\infty \leq n^\kappa. \tag{2}$$

Théorème 1.2 *Si $\|\tilde{P}_{0,\mu}\| < 1$, alors, pour toute fonction φ dans $L_0^p(X, m)$, avec $p > 2$, pour presque tout ω, on a $\lim \frac{1}{n} \int_X |S_n^\omega \varphi|^2 \ dm = \sigma^2$.*

Preuve Soit a une constante dans $]0, \kappa\frac{p-2}{2}[$. D'après le lemme 1.1, il existe K intégrable telle que

$$|\|S_n^\omega \varphi\|_2^2 - \|S_n^\omega \varphi_n\|_2^2| \leq 2K(\omega)\, n^{1+a}\, \|\varphi - \varphi_n\|_2 \|\varphi\|_2 \leq 2K(\omega)\, n^{1+a} \left(C \frac{\|\varphi\|_p^p}{n^{\kappa(p-2)}}\right)^{1/2} \|\varphi\|_2,$$

de sorte qu'il suffit de montrer la convergence pour $S_n^\omega \varphi_n$ au lieu de $S_n^\omega \varphi$. Grâce à la propriété de trou spectral le calcul peut être réduit à une somme de la forme $\sum_{r=1}^{n^a}$.

Soit $\psi_{j,n}$ la fonction définie sur Ω par $\psi_{j,n} = \int_X \varphi_n\, \varphi_n \circ \theta_\tau^j\, dx - \int_{\Omega \times X} \varphi_n\, \varphi_n \circ \theta_\tau^j\, dx\, d\mathbb{P}(\omega)$. Elle dépend seulement des j premières coordonnées de ω, donc $\int_\Omega \psi_{j,n}\ \psi_{j,n} \circ \theta^\ell\, d\mathbb{P}(\omega) = 0$, pour $\ell > j$. A l'aide de cette remarque et d'un calcul de moment, on montre que pour presque tout ω

$$\lim_n \Big(\sum_{r=1}^{n^a} \int_X \frac{1}{n} \sum_{\ell=0}^{n-1-r} (\varphi_n\ \varphi_n \circ \theta_\tau^r)(\theta_\tau^\ell(\omega, x))\, dx\ - \sum_{r=1}^{n^a} \int_{\Omega \times X} (\varphi\ \varphi \circ \theta_\tau^r)(\omega, x)\, dx\ d\mathbb{P}(\omega)\Big) = 0.$$

$\square$

La propriété de trou spectral permet de majorer les moments de $S_n \varphi_n$ et d'obtenir :

Proposition 1.3 *Pour tout entier $r \geq 1$, pour tout $\alpha > 0$, il existe une constante $C > 0$ telle que, pour toute fonction $\varphi \in L_0^\infty(X, m)$, $\mathbb{P} \otimes m(|S_n \varphi| > L) \leq C L^{-2r} n^{r(1+\alpha)} \|\varphi\|_\infty^{2r}$, $\forall n \geq 1$.*

2. Le TCL à ω fixé

Théorème 2.1 *Si $\|\tilde{P}_{0,\mu}\| < 1$, pour toute fonction réelle φ dans $L_0^p(X, m)$, avec $p > 2$, pour presque tout $\omega \in \Omega$, nous avons*

$$\lim_{n \to \infty} m(x : \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} S_n^\omega \varphi(\omega, x) < a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a} \exp(-t^2/2)\ dt, \forall a \in \mathbb{R}.$$

Preuve La méthode utilisée est analogue à celle de [1]. (Voir aussi [4] pour une autre méthode appliquée à des composées d'une suite stationnaire d'automorphismes du tore). Grâce au lemme 1.1, il suffit d'établir la convergence pour $S_n^\omega \varphi_n$ au lieu de $S_n^\omega \varphi$, (φ_n) étant la suite définie plus haut. Soit σ_n^2 la variance associée à φ_n pour l'action de θ_τ. Rappelons que $\lim_n \sigma_n = \sigma(\varphi)$. Posons

$$Z_k(t, \omega) = |\int_X \exp(\frac{itS_k^\omega \varphi_k(x)}{\sqrt{k}})\, dm(x) - \exp(-\frac{\sigma_k^2 t^2}{2})|.$$

Nous allons montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}$ et presque tout ω, $\lim_k Z_k(t, \omega) = 0, \forall t \in [-p, p]$. Nous avons :

$$Z_k^2(t, \omega) = |\int_X e^{\frac{itS_k^\omega \varphi_k(x)}{\sqrt{k}}}\ dm(x)|^2 - e^{-\sigma_k^2 t^2} + 2e^{-\frac{\sigma_k^2 t^2}{2}}\ \Re e\big(e^{-\frac{\sigma_k^2 t^2}{2}} - \int_X e^{\frac{itS_k^\omega \varphi_k(x)}{\sqrt{k}}}\ dm(x)\big).$$

Comme dans [1] ou [5], écrivons

$$\mathbb{E}\big(|\int_X \exp(\frac{itS_k^\omega \varphi_k(x)}{\sqrt{k}})\, dm(x)|^2\big) = \mathbb{E}\big(\int_{X \times X} \exp(i\frac{t}{\sqrt{k}} \sum_{\ell=0}^{k-1} (\varphi_k(g_1^\ell(\omega)x) - \varphi_k(g_1^\ell(\omega)y))\, dm(x)\, dm(y)\big).$$

Sous l'hypothèse $\|\tilde{P}_{0,\mu}\| < 1$, la majoration (1) s'applique à $\tilde{P}_{0,\mu}$ et à la fonction $(x, y) \mapsto \varphi_k(x) - \varphi_k(y)$ pour la marche diagonale $\theta_\tau \otimes \theta_\tau$, la variance asymptotique étant égale à $2\sigma_k^2$; d'où :

$$\mathbb{E}\left(Z_k^2(t,\omega)\right) \leq C\ln^2(k)\,k^{-1/2+3\kappa}. \tag{3}$$

Soient $\alpha, \beta, \gamma, \kappa$ des paramètres réels positifs qui seront précisés plus loin et L un entier. Comme dans [1] nous découpons l'ensemble des entiers naturels et l'intervalle $[-p,p]$. Posons $I_n := \{n^L, \ldots, (n+1)^L - 1\}$ et, en notant $[\ ]$ la partie entière, définissons $s_n := [((n+1)^L - n^L)^{(1-\beta)}] + 1$, $r_n := [((n+1)^L - n^L)^{\beta}] + 1$. Pour $n \geq 2L$, l'inégalité $(n+1)^L - n^L \leq n^L$ est vérifiée, ce qui assure $r_n \leq 2n^{\beta L}$ et $s_n \leq 2n^{(1-\beta)L}$, pour n grand. Pour $\ell = 0, ..., s_n - 1$, soit $I_{n,\ell} := \{n^L + \ell r_n + k \ / \ k = 0, \ldots, r_n - 1\}$. Nous avons : $I_n \subset \bigcup_{\ell=0}^{s_n-1} I_{n,\ell}$.

Nous pouvons modifier la suite (φ_k) introduite plus haut de telle façon que $\varphi_k = \varphi_{k_{n,\ell}}$ pour $k \in I_{n,\ell}$, les propriétés (2) restant satisfaites. Posons également $J_{j,n} := [\frac{j-1}{n^{\gamma L}}, \frac{j}{n^{\gamma L}}]$, $t_{n,j} := \frac{j-1}{n^{\gamma L}}$, $k_{n,\ell} := n^L + \ell r_n$. Soit $\varepsilon \in]0,1[$. Ces découpages fournissent la majoration

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\sup_{k\geq N^L} \sup_{t\in[-p,p]} Z_k(t,\omega) \geq \varepsilon) \\
&\leq \sum_{n=N}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{s_n-1} \sum_{|j|\leq pn^{\gamma L}+1} \big(\mathbb{P}(\sup_{k\in I_{n,\ell}} \sup_{t\in J_{j,n}} |Z_k(t,\omega) - Z_{k_{n,\ell}}(t_{n,j},\omega)| \geq \frac{\varepsilon}{2}) + \mathbb{P}(|Z_{k_{n,\ell}}(t_{n,j},\omega)| \geq \frac{\varepsilon}{2})\big).
\end{aligned} \tag{4}$$

D'après (3), l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\mathbb{P}(|Z_{k_{n,\ell}}(t_{n,j},\omega)| \geq \varepsilon/2) \leq C\varepsilon^{-2}\ln^2(k_{n,\ell})\,k_{n,\ell}^{3\kappa-1/2} \leq C'\varepsilon^{-2}n^{(4\kappa-1/2)L}. \tag{5}$$

Pour $k \in I_{n,l}$ et $t \in J_{j,n}$, nous avons $0 \leq k - k_{n,l} \leq r_n \leq 2n^{L\beta}$ et $|t - t_{n,j}| \leq n^{-\gamma L}$. Partons de l'inégalité

$$|Z_k(t,\omega) - Z_{k_{n,\ell}}(t_{n,j},\omega)| \leq \int_X |e^{it\frac{S_k^\omega \varphi_k(x)}{\sqrt{k}}} - e^{it_{n,j}\frac{S_{k_{n,\ell}}^\omega \varphi_{k_{n,\ell}}(x)}{\sqrt{k_{n,\ell}}}}|\ dm(x) + |e^{-\sigma_k^2\frac{t^2}{2}} - e^{-\sigma_k^2\frac{t_{n,j}^2}{2}}|.$$

Soit $N_0(\varepsilon)$ tel que $|e^{-\sigma_k^2\frac{t^2}{2}} - e^{-\sigma_k^2\frac{t_{n,j}^2}{2}}| < \varepsilon/4$, pour $n \geq N_0(\varepsilon)$ et $t \in J_{j,n}$. Nous avons alors

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\sup_{k\in I_{n,\ell}} \sup_{t\in J_{j,n}} |Z_k(t,\omega) - Z_{k_{n,\ell}}(t_{n,j},\omega)| \geq \frac{\varepsilon}{2}) \\
&\leq \mathbb{P}(\omega : \int_X \sup_{k\in I_{n,\ell}} \sup_{t\in J_{j,n}} |e^{it\frac{S_k^\omega \varphi_k(x)}{\sqrt{k}}} - e^{it_{n,j}\frac{S_{k_{n,\ell}}^\omega \varphi_{k_{n,\ell}}(x)}{\sqrt{k_{n,\ell}}}}|\ dm(x) \geq \frac{\varepsilon}{4}).
\end{aligned} \tag{6}$$

Tenant compte du fait que $\varphi_k = \varphi_{k_{n,\ell}}$ pour $k \in I_{n,\ell}$ et de la majoration, vérifiée si $\beta + \gamma < 1$,

$$\sup_{k\in I_{n,\ell}} \sup_{t\in J_{j,n}} |\frac{t}{\sqrt{k}} - \frac{t_{n,j}}{\sqrt{k_{n,\ell}}}| \leq pn^{(\beta-3/2)L} + n^{-(\gamma+1/2)L} \leq Cn^{-(\gamma+1/2)L},$$

nous avons

$$\begin{aligned}
&\sup_{k\in I_{n,\ell}} \sup_{t\in J_{j,n}} |e^{it\frac{S_k^\omega \varphi_k(x)}{\sqrt{k}}} - e^{it_{n,j}\frac{S_{k_{n,\ell}}^\omega \varphi_{k_{n,\ell}}(x)}{\sqrt{k_{n,\ell}}}}| \leq \sup_{k\in I_{n,\ell}} \sup_{t\in J_{j,n}} |t\frac{S_k^\omega \varphi_{k_{n,\ell}}(x)}{\sqrt{k}} - t_{n,j}\frac{S_{k_{n,\ell}}^\omega \varphi_{k_{n,\ell}}(x)}{\sqrt{k_{n,\ell}}}| \\
&\leq \sup_{k\in I_{n,\ell}} \sup_{t\in J_{j,n}} \frac{|t|}{\sqrt{k}} |S_k^\omega \varphi_{k_{n,\ell}}(x) - S_{k_{n,\ell}}^\omega \varphi_{k_{n,\ell}}(x)| + \sup_{k\in I_{n,\ell}} \sup_{t\in J_{j,n}} |\frac{t}{\sqrt{k}} - \frac{t_{n,j}}{\sqrt{k_{n,\ell}}}|\,|S_{k_{n,\ell}}^\omega \varphi_{k_{n,\ell}}(x)| \\
&\leq\ pn^{-L/2} \sup_{k\in I_{n,\ell}} |S_k^\omega \varphi_{k_{n,\ell}}(x) - S_{k_{n,\ell}}^\omega \varphi_{k_{n,\ell}}(x)| + Cn^{-(\gamma+1/2)L}|S_{k_{n,\ell}}^\omega \varphi_{k_{n,\ell}}(x)|.
\end{aligned} \tag{7}$$

Si ψ est une fonction définie sur $\Omega \times X$ telle que $0 \leq \psi \leq 2$ et si η est un nombre réel > 0, alors la minoration $m(\psi) > \eta$ implique $m(\psi > \eta/2) > \eta/4$. On en déduit :

$$\mathbb{P}(m(\psi) > \eta) \leq \mathbb{P}\{\omega : m\{x : \psi(\omega, x) > \frac{\eta}{2}\} > \frac{\eta}{4}\} \leq 4\eta^{-1} \mathbb{P} \otimes m\{(\omega, x) : \psi(\omega, x) > \frac{\eta}{2}\}.$$

Compte-tenu de (6), cette inégalité implique :

$$\mathbb{P}(\sup_{k \in I_{n,\ell}} \sup_{t \in J_{j,n}} |Z_k(t, \omega) - Z_{k_{n,\ell}}(t_{n,j}, \omega)| \geq \varepsilon/2)$$

$$\leq 8\varepsilon^{-1} \mathbb{P} \otimes m\{(\omega, x) : \sup_{k \in I_{n,\ell}} \sup_{t \in J_{j,n}} |e^{it \frac{S_k^\omega \varphi_{k_{n,\ell}}(x)}{\sqrt{k}}} - e^{it_{n,j} \frac{S_{k_{n,\ell}}^\omega \varphi_{k_{n,\ell}}(x)}{\sqrt{k_{n,\ell}}}}| \geq \frac{\varepsilon}{8}\} \leq 8\varepsilon^{-1}(A + B),$$

A et B étant définis (cf. (7)) par

$$A = \mathbb{P} \otimes m\{(\omega, x) : \sup_{k \in I_{n,\ell}} pn^{-L/2} |S_k^\omega \varphi_{k_{n,\ell}}(x) - S_{k_{n,\ell}}^\omega \varphi_{k_{n,\ell}}(x))| \geq \frac{\varepsilon}{16}\},$$

$$B = \mathbb{P} \otimes m\{(\omega, x) : Cn^{-(\gamma+1/2)L} |S_{k_{n,\ell}}^\omega \varphi_{k_{n,\ell}}(x)| \geq \frac{\varepsilon}{16}\}.$$

Comme $S_k \varphi_{k_{n,\ell}} - S_{k_{n,\ell}} \varphi_{k_{n,\ell}} = S_{k-k_{n,\ell}} \varphi_{k_{n,\ell}} \circ \theta_\tau^{k_{n,\ell}}$, la proposition 1.3 appliquée avec $r = 4$ implique

$$A \leq C(\varepsilon n^{L/2})^{-8}\, r_n^{4(1+\alpha)}\, k_{n,\ell}^{8\kappa}\, n^{\beta L} \leq C'\varepsilon^{-8}\, n^{-4L}\, n^{4(1+\alpha)\beta L}\, n^{8\kappa L}\, n^{\beta L},$$
$$B \leq C'(\varepsilon\, n^{-(\gamma+1/2)L})^{-8}\, n^{4(1+\alpha)L}\, n^{8\kappa L} \leq C'\varepsilon^{-8}\, n^{-4(2\gamma+1)L}\, n^{4(1+\alpha)L}\, n^{8\kappa L}.$$

En rassemblant dans (4) la majoration (5) et les majorations précédentes, nous obtenons

$$\mathbb{P}(\sup_{k \geq N^L} \sup_{t \in [-p,p]} Z_k(t, \omega) \geq \varepsilon)$$
$$\leq C\varepsilon^{-9} \sum_{n=N}^{\infty} n^{(1-\beta)L}\, n^{\gamma L} \left(n^{-(1/2-4\kappa)L} + n^{-4L}\, n^{4(1+\alpha)\beta L}\, n^{8\kappa L}\, n^{\beta L} + n^{-4(2\gamma+1)L}\, n^{4(1+\alpha+2\kappa)L}\right).$$

Soient $\alpha = 0.01$, $\beta = 0.7$, $\gamma = 0.07$, $\kappa = 0.001$ et $L = 20$. Pour tout $\eta > 0$, il existe $N_1(\varepsilon, \eta)$ tel que le majorant, reste de la série de terme général $C\varepsilon^{-9}\,(n^{-2.52} + n^{-1.88} + n^{-2.84})$, soit inférieur à η pour $N \geq N_1(\varepsilon, \eta)$. On a donc $\mathbb{P}(\sup_{k \geq N^L} \sup_{t \in [-p,p]} Z_k(t, \omega) \geq \varepsilon) \leq \eta$, pour $N \geq \max(N_0(\varepsilon), N_1(\varepsilon, \eta))$; d'où $\mathbb{P}(\limsup_k \sup_{t \in [-p,p]} Z_k(t, \omega) > 0) = 0$. $\square$

Références

[1] A. Ayyer, C. Liverani, M. Stenlund : Quenched CLT for random toral automorphism, Discrete Contin. Dyn. Syst. 24 (2009), no. 2, p. 331-348.

[2] B. Bekka, Y. Guivarc'h : Spectral properties of a group of affine transformations on a nilmanifold, preprint 2011.

[3] J. Bourgain, A. Gamburd : Spectral gaps in SU(d), C. R. Math. Acad. Sci. Paris 348 (2010), no. 11-12, p. 609-611.

[4] J.-P. Conze, S. Le Borgne, M. Roger : Central limit theorem for products of toral automorphisms, preprint 2010.

[5] A. Furman, Ye. Shalom : Sharp ergodic theorems for group actions and strong ergodicity, Ergodic Theory Dynam. Systems 19 (1999), no. 4, p. 1037-1061.

[6] Y. Guivarc'h : Limit theorems for random walks and products of random matrices, in *Probability measures on groups : recent directions and trends*, p. 255-330, Tata Inst. Fund. Res., Mumbai, 2006.

[7] C. Jan : Vitesse of convergence dans le TCL pour des chaînes of Markov et certains processus associés à des systèmes dynamiques, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 331 (2000), 5, p. 395-398.

[8] M. Rosenblatt : *Markov processes. Structure and asymptotic behavior*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 184, Springer-Verlag, New York, 1971.