MATHÉMATIQUES

Comment mesurer les surfaces ?

Yves Meyer[1]

Ce texte a été rédigé par Yves Meyer à la suite de sa conférence « Pourquoi Lebesgue essayait de mesurer les surfaces, et n'y arrivait pas ? » donnée le 11 janvier 2006 à la Bibliothèque Nationale de France. Cette conférence était la première des quatre du cycle « Un texte, un mathématicien » organisée par la BnF, la SMF et la revue Tangente pour l'année 2006.

Ce problème a eu une extraordinaire fécondité. Posé dès les débuts de la civilisation, le problème de la mesure des surfaces a été l'une des sources de la géométrie ; il a ensuite contribué à la découverte du calcul infinitésimal, puis de la théorie moderne de l'intégration (Borel et Lebesgue) ; il a finalement débouché sur la géométrie fractale et le traitement de l'image.

Archimède (-287, -212) découvrit comment mesurer l'aire comprise entre une parabole, sa tangente au sommet et deux droites parallèles à l'axe L de la parabole. Pour ce faire, Archimède découpait la surface en de très fines lamelles parallèles à L. Archimède inventait le calcul infinitésimal et préludait ainsi aux mathématiques du XVII^e^ et du XVIII^e^ siècle. Au début du XX^e^ siècle, Emile Borel et Henri Lebesgue fondèrent la théorie moderne de la mesure qui permet de calculer essentiellement toutes les aires planes (techniquement, les aires de tous les ensembles boréliens) et tous les volumes dans l'espace. Les œuvres de Borel et de Lebesgue constituent le socle sur lequel est bâti le calcul des probabilités, car la probabilité d'un événement est la mesure de l'ensemble des instances où il se produit. En 1902, Henri Lebesgue posa avec insistance le problème de *la mesure des surfaces d'objets tridimensionnels*. Quand ces surfaces sont assez régulières, la méthode classique de la triangulation suffit aux besoins. Mais que faire dans le cas le plus général ? Lebesgue cherchait à mesurer les surfaces d'objets rugueux, pointus, présentant des aspérités et ayant une géométrie complexe. Pour Lebesgue une feuille de papier froissée était une figure aussi intéressante que la surface d'une sphère.

Abram Besicovitch, Felix Hausdorff, Leonida Tonelli et Ennio De Giorgi ont donné des réponses différentes et même contradictoires aux questions posées par Lebesgue et, ce faisant, ont ouvert de nouvelles voies aux mathématiques pures et appliquées. Les géométries fractales et les algorithmes modernes de traitement de l'image sont directement issus de leurs travaux. Mais il convient d'abord de revenir à Camille Jordan (1838-1922). Il introduisit les *fonctions à variation bornée* qui furent une source d'inspiration, mais aussi un piège pour Lebesgue. Une fonction f

[1] Hervé Pajot m'a aidé à améliorer ce texte et je l'en remercie chaleureusement.

définie sur l'intervalle $[a, b]$, à valeurs réelles ou complexes, est à variation bornée si les sommes $\Sigma_1^N |f(t_{j+1}) - f(t_j)|$ étendues à toutes les partitions $a = t_0 \leqslant \cdots \leqslant t_j \leqslant t_{j+1} \leqslant \cdots \leqslant t_N = b$ de $[a, b]$ ne dépassent pas une certaine constante C et la plus petite de ces constantes est la *variation* totale de f sur $[a, b]$. La fonction $f(t) = t \sin(1/t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, n'est pas à variation bornée sur $[0, 1]$ alors que $g(t) = t \sin(1/\sqrt{t})$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, l'est. Jordan définit la longueur d'une courbe Γ, comme la limite, quand le plus grand côté tend vers 0, des longueurs des lignes polygonales inscrites. Une courbe de longueur finie est dite rectifiable. Les fonctions à variation bornée servent à paramétrer les courbes rectifiables. En effet, soit $z(t) = x(t) + iy(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, une représentation paramétrique d'une courbe rectifiable Γ. Camille Jordan nous apprend que la longueur de Γ est égale à la variation totale de $z(t)$. *La théorie de Jordan peut-elle être étendue aux surfaces ?* C'est la question qui fut posée par Camille Jordan à Lebesgue.

1. Henri Lebesgue

Henri Lebesgue naquit à Beauvais, en 1875. Son père, ouvrier typographe, mourut de la tuberculose. Ses deux sœurs aînées furent aussi emportées par cette maladie. Sa mère travailla durement pour subvenir aux besoins de la famille. Après de brillantes études, Lebesgue entra à l'École Normale Supérieure de la rue d'Ulm en 1894. Il écrivit sa thèse alors qu'il enseignait au lycée de Nancy. Il soutint cette thèse en 1902. Il fut alors nommé professeur à l'université de Rennes, puis de Poitiers et enfin à la Sorbonne en 1910. Professeur au Collège de France en 1921, il fut élu à l'Académie des Sciences en 1922. Il mourut à Paris en 1941.

Dans sa thèse, Lebesgue donna une définition nouvelle de la primitive $F(x)$ d'une fonction $f(x)$ de la variable réelle x ; $F(x)$ est l'aire de la surface S délimitée par le graphe de $f(\cdot)$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées (c-à-d. la droite d'abscisse 0) et la droite d'abscisse x. Lebesgue nous apprend que cette aire se calcule en divisant S en *fines lamelles horizontales* d'épaisseur h et en laissant ensuite h tendre vers 0. Cette approche est bien meilleure que la méthode d'Archimède, car elle introduit une plus grande stabilité dans les calculs numériques. On aboutit ainsi aux fonctions intégrables au sens de Lebesgue et l'on peut se libérer des conditions superflues (continuité, etc.) qui étaient imposées à $f(x)$ depuis les travaux de Riemann.

Comme Einstein le faisait à la même époque pour la Physique, Lebesgue revint aux fondements de la géométrie et aux problèmes posés par la mesure des grandeurs. Il souleva les questions suivantes : *Qu'est-ce qu'un volume ? Une surface ? Une frontière ? Comment calculer la surface d'un épi de blé ? Combien vaut la surface d'un arbre ?* Aujourd'hui Lebesgue nous aurait demandé ce que signifie la phrase : « *La surface du cortex cérébral est de* $2m^2$ ». Les mathématiques qu'on avait enseignées à Lebesgue ne permettaient pas même de calculer la surface d'une feuille de papier froissée. Lebesgue l'observait avec malice alors qu'il était encore étudiant à l'École Normale Supérieure. La notion d'ensemble avait été chavirée par les travaux de Georg Cantor (1845-1918). Avant Cantor, les formes géométriques étaient lisses et régulières et l'on pouvait aisément en calculer la surface. Les nouveaux objets (ensembles) étudiés à partir de Cantor peuvent être rugueux, hérissés de pointes, fragmentés, tout comme le sont les objets qui nous entourent. Lebesgue se présenta donc comme un mathématicien appliqué quand il écrivit : « *Réduite aux théories générales, les mathématiques deviendraient une* *belle forme sans contenu ; elles mourraient rapidement.* » Lebesgue se passionnait pour la « géométrie élémentaire » et nous verrons que cette passion ouvrit de nouvelles voies à l'analyse mathématique. Lebesgue définit l'aire d'une surface comme suit :

Définition 1. *On appellera aire d'une surface S la plus petite des limites des aires des surfaces polyédrales tendant vers S.*

Il revient au même de demander aux S_j d'être des surfaces suffisamment régulières. Mais il reste à savoir en quel sens les surfaces approchées tendent vers S. Lebesgue pensait-il à la distance de Hausdorff définie comme suit ?

Si E et F sont deux ensembles fermés, la distance de Hausdorff entre E et F est notée $d(E, F)$ et est définie par la condition suivante : pour tout $\varepsilon > 0$, on a $d(E, F) < \varepsilon$ si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées

(a) pour tout $x \in E$, il existe un $y \in F$ tel que $|x - y| \leqslant \varepsilon$

(b) la même propriété a lieu quand E et F sont échangés.

Filippo Santambrogio, jeune chercheur à l'École Normale Supérieure de Pise, m'a fait observer que si l'on utilisait ces définitions, la surface du carré unité C serait nulle. Il est en effet possible de construire, pour tout ε positif, une route en zigzag qui parcourt C en pénétrant dans chaque carré de côté ε. On peut faire en sorte que la largeur de cette route soit si petite que son aire ne dépasse pas ε. On arrive à la contradiction désirée (FIG. 1).

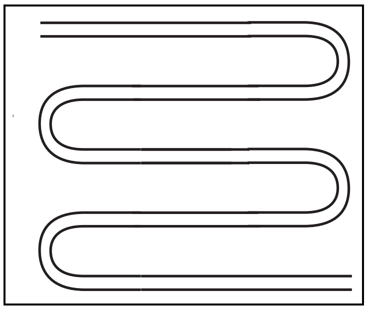

FIG. 1

Mais à l'intérieur du texte intitulé *Sur la définition de l'aire des surfaces*, Lebesgue répond en partie à cette objection en précisant la notion de convergence. Il écrit :

> *« Ayant à mesurer une surface S, il nous faudra considérer des surfaces polyédrales S_1, $S_2, \cdots$, correspondant point à point d'une façon biunivoque et continue à S, et tendant vers S. »*

Mais, là encore, le contre-exemple de Filippo Santambrogio contredit cette nouvelle définition. Il est probable que Lebesgue demandait que l'homéomorphisme $\Theta_j : S \mapsto S_j$ converge vers l'identité. Lebesgue avait en vue des surfaces paramétrées, définies par trois équations $x = f(u, v); y = g(u, v); z = h(u, v), \ (u, v) \in D$, où f, g, h sont trois fonctions continues dans le disque unité D. Pour une surface fermée le disque unité serait remplacé par la sphère unité. Supposons que les $\Phi_j = (f_j, g_j, h_j)$ paramétrant S_j et $\Phi = (f, g, h)$ paramétrant S soient des applications biunivoques de D sur S_j ou S. Alors l'approximation des S_j vers S définie par

Lebesgue équivaut à la condition que les applications Φ_j convergent uniformément sur D vers Φ. Le problème posé par l'instabilité de la mesure d'une surface quand on modifie légèrement celle-ci est riche et difficile. Bien entendu on peut déplacer le problème et associer à une surface S un objet mathématique σ appelé *mesure de surface*, dont le support est S et qui est défini par la condition que, pour tout ensemble borélien B, la mesure de la surface de $S \cap B$ soit égale à $\sigma(B)$. On peut alors définir la convergence des surfaces S_j vers S par la convergence faible des mesures de surface σ_j vers σ. S'il en est ainsi, cette convergence entraîne celle des mesures des surfaces des S_j vers celle de S. Ce point de vue sera utilisé par De Giorgi, comme nous le verrons ci-dessous. Le lecteur qui voudrait en savoir plus se reportera au livre de Guy David [6], page 217, Théorème 4.

Camille Jordan critiqua la définition 1 en termes assez vifs [10] :

> *« Je ne suis pas satisfait par ce que vous avez dit de l'aire des surfaces. Vous dites que vous édifiez, pour la mesure des aires des surfaces, une théorie entièrement analogue à celle de la mesure des longueurs des courbes mais, pourtant, vous laissez sans réponses des problèmes essentiels alors que ces problèmes sont résolus dans le cas des courbes. Une courbe* $x = f(t)$; $y = g(t)$; $z = h(t)$ *étant donnée, nous savons quelle suite d'opérations il nous faut effectuer sur* f, g, h *pour reconnaître si la courbe est rectifiable et pour calculer sa longueur finie ou infinie ; vous ne dites rien du problème analogue pour les surfaces données par trois équations* $x = f(u, v)$; $y = g(u, v)$; $z = h(u, v)$. *De là résulte aussi que tandis que l'on sait construire les formes les plus générales des fonctions* $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$ *relatives aux courbes rectifiables, vous ne nous apprenez pas à former les fonctions* $f(u, v)$, $g(u, v)$, $h(u, v)$ *donnant des surfaces quarrables. »*

Nous verrons que Felix Hausdorff, Abram Besicovitch, Leonida Tonelli et Ennio De Giorgi ont chacun apporté une réponse différente aux trois questions suivantes : *la définition donnée par Lebesgue est-elle cohérente ? Comment répondre au problème posé par Jordan ? Comment calculer l'aire du graphe S d'une fonction définie sur le carré unité ?*

Une des motivations de Lebesgue était le célèbre problème des surfaces minimales posé par Plateau. Joseph Plateau (1801-1883) fut un précurseur du dessin animé : il inventa en 1883 un appareil de projection fondé sur la persistance des impressions visuelles. Il posa le problème de la détermination de la surface d'aire minimale ayant une courbe donnée pour bord, problème essentiel dans l'étude des lames minces liquides. Une courbe fermée Γ est fixée dans l'espace et l'on cherche à construire la surface Σ délimitée par Γ dont l'aire soit la plus petite possible. Ce problème est résolu par l'expérience des bulles de savon s'appuyant sur Γ. Comme le remarque Lebesgue, on ne peut résoudre ce problème qu'à condition de laisser concourir *toutes les surfaces* Σ délimitées par Γ et dont l'aire a un sens. Lebesgue le dit avec force quand il écrit :

> *« Bref nous avons tous fait cette faute de confondre borne inférieure et minimum ; mais il y a un profit certain quoique d'un autre ordre, à constater avec quelle facilité nous errons et qu'il*

suffit d'avoir donné un aspect géométrique à une erreur classique et ancienne pour que personne ne la reconnaisse plus. »

David Hilbert avait alors introduit la *méthode directe* en calcul des variations. Le minimum n'est atteint que si l'on dispose d'une certaine forme de compacité s'appliquant à l'espace où ce minimum est recherché. La méthode directe de Hilbert nous oblige donc à étudier la question posée par Jordan : comment paramétriser l'ensemble des surfaces possédant une aire et vérifier la propriété de compacité requise par la méthode directe de Hilbert ? La solution sera donnée par Leonida Tonelli.

2. Felix Hausdorff

Hausdorff naquit à Breslau en 1868. Il fut nommé professeur à l'université de Leipzig en 1902. Il y enseigna jusqu'en 1910 et accepta alors une offre de l'université de Bonn. Sous le pseudonyme de Paul Mongré, il publia des ouvrages littéraires et philosophiques. Hausdorff était extrêmement modeste et son collègue Study eut du mal à le convaincre de se consacrer aux mathématiques. Hausdorff enseigna à Bonn jusqu'en 1935. Il fut alors chassé de l'université par les Nazis. En 1942, il décida avec sa femme et sa belle-sœur de se suicider, évitant ainsi la déportation et les camps.

Ses travaux mathématiques concernent la théorie des ensembles et les fondements de la topologie. Il étudia le même problème que Lebesgue, mais avant de calculer les aires des surfaces, il chercha à savoir quels sont les objets dont on puisse dire qu'ils sont de dimension 2. Ce faisant, Hausdorff définit la dimension d'un objet (c'est-à-dire d'un ensemble arbitraire). Cette définition sera utilisée par Benoît Mandelbrot pour décrire et analyser certains objets complexes du monde qui nous entoure. Le travail fondateur de Hausdorff, *Dimension und äusseres Mass*, est publié en 1919 (voir la référence [2]). Voici ce dont il s'agit : soit F un espace métrique (dans lequel on sait mesurer les distances) et soit E une partie de F. On veut définir la dimension de E. Soit s un nombre réel qui est candidat pour être la dimension de E. Pour tout $\varepsilon > 0$, on considère tous les recouvrements possibles de E par une suite (a priori infinie) d'ensembles U_j de diamètre $r_j < \varepsilon$. On définit la constante α_s de façon appropriée en fonction du volume de la boule unité en dimension s (quand s est entier). On calcule alors la somme (finie ou infinie) de la série $\Sigma_1^\infty r_j^s$ pour chacun de ces recouvrements et l'on appelle $H(s, \varepsilon; E)$ la borne inférieure de ces sommes (multipliées par la constante α_s), en essayant et testant tous les recouvrements par des ensembles de diamètre ne dépassant pas ε. Dans ces conditions $H(s, \varepsilon; E)$ est une fonction décroissante de $\varepsilon > 0$ et a une limite (éventuellement infinie) si ε tend vers 0. Cette limite est la « mesure extérieure $M(s; E)$ de E en dimension s ». Le rôle de la constante α_s est de faire en sorte que $M(s; E)$ coïncide avec la surface ou le volume usuels quand s est un entier.

Définition 2. *La dimension de E est la borne supérieure des s tels que la mesure extérieure $M(s, E)$ soit infinie. C'est aussi la borne inférieure des s tels que $M(s, E)$ soit nulle.*

Voici trois exemples de structures fractales. L'ensemble triadique de Cantor sera notre premier exemple ; il est construit en « creusant des trous » dans l'intervalle $E = [0, 1]$. Le premier trou est l'intervalle ouvert (1/3, 2/3) que l'on retire. Il reste deux intervalles de longueur $1/3$ dans lesquels on répète l'opération. On obtient successivement $E_1, E_2, \cdots, E_j, \cdots$. L'ensemble E_j se compose donc de 2^j intervalles de longueur 3^{-j}. L'ensemble triadique de Cantor est l'intersection des E_j, $j \geqslant 1$. Il peut être aussi défini comme l'ensemble de tous les nombres réels dont le développement en base 3 ne contient aucun 1 ; on admet les développements ne contenant que des 0 à partir d'un certain rang ou des 2 à partir d'un certain rang. La dimension de Hausdorff de l'ensemble triadique de Cantor est égale à $\log 2/\log 3$. L'ensemble triadique de Cantor est totalement discontinu ; c'est de la poussière d'ensemble.

Un exemple plus intéressant, car connexe, d'un seul tenant, est fourni par l'ensemble du plan défini comme suit. On part du carré unité D que l'on découpe en 9 carrés de côté $1/3$. On supprime le carré central et l'on obtient ainsi une sorte de couronne E_1 composée de 8 carrés D_j de côté $1/3$. On itère l'opération sur chacun de ces carrés et l'on obtient alors un ensemble E_2 qui se compose de 8 petites couronnes. Finalement l'ensemble que nous voulons construire (nommé tapis de Sierpinski) est l'intersection E des E_j. Cet ensemble E a pour dimension de Hausdorff $\frac{\log 8}{\log 3}$. C'est un objet connexe, d'un seul tenant, intermédiaire entre une courbe et une surface.

L'éponge de Sierpinski est notre troisième exemple ; c'est une architecture tridimensionnelle qui est définie comme suit. On part du cube unité Q. On appelle L_1, L_2, L_3, les trois axes de symétrie de Q qui sont perpendiculaires aux faces F_1, F_2, F_3 de Q. On découpe alors Q en 27 sous-cubes de côté $1/3$. On appelle $C_1 \subset F_1$, $C_2 \subset F_2$, $C_3 \subset F_3$, les trois carrés concentriques de côté $1/3$. On perce enfin trois tunnels dans Q autour des trois axes L_1, L_2, L_3; ces tunnels (ou galeries) ont pour section C_1, C_2, C_3. Une fois ces trois galeries supprimées, il reste un ensemble connexe de 20 cubes fermés Q_j, $1 \leqslant j \leqslant 20$, de côté $1/3$. Toutes choses égales par ailleurs, on continue la construction : on perce à nouveau trois tunnels dans chacun de ces petits cubes Q_j. Ce qui subsiste est une suite décroissante d'ensembles compacts E_j dont l'intersection est l'éponge de Sierpinski E. Le volume de E est nul et un spécialiste de l'architecture gothique parlerait de « dentelle de pierre » en décrivant E. La dimension de Hausdorff de E est $\frac{\log 20}{\log 3}$. L'éponge de Sierpinski est plus épaisse qu'une surface sans être pour autant un volume. C'est, par ailleurs, un ensemble connexe, d'un seul tenant. Si l'on accepte l'hypothèse de travail que les définitions données par Lebesgue et par Hausdorff sont compatibles, alors la surface de l'éponge de Sierpinski est infinie, car $\frac{\log 20}{\log 3}$ est strictement supérieur à 2. Mais la définition de la mesure d'une surface donnée par Lebesgue est-elle compatible avec la théorie de Hausdorff ?

3. Abram Samoilovitch Besicovitch

Besicovitch naquit à Berdyansk, Russie, en 1891. C'est le troisième héros dont nous allons évoquer la vie. En 1917, après avoir soutenu sa thèse sous la direction de Markov, il est nommé professeur à l'université de Perm (Oural) qui venait d'être créée. Comme Pasternak le décrivit dans le « Docteur Jivago », la guerre civile fit rage à Perm et l'Armée Blanche prit le contrôle de Perm de 1918 à 1919. En 1919, Besicovitch fut nommé à Petrograd (aujourd'hui Saint-Pétersbourg). En 1924, il s'enfuit de l'Union Soviétique en franchissant à pied la frontière avec la Finlande.

Il arriva à Copenhague et s'établit définitivement à Cambridge en 1927. Il mourut à Cambridge en 1970.

Besicovitch s'attaqua au problème de savoir si la mesure des surfaces proposée par Lebesgue était compatible avec celle donnée par Hausdorff. À sa plus grande surprise, Besicovitch constata qu'il n'en est rien [3]. En se plaçant dans l'espace euclidien usuel, Besicovitch construisit une surface W, homéomorphe à la sphère et ayant deux propriétés contradictoires : W a une aire finie au sens de Lebesgue, mais a aussi une mesure tridimensionnelle positive. La dimension de Hausdorff de W est donc 3 alors que, pour Lebesgue, W est une surface. Dans les lignes qui suivent nous décrirons ce qui joue le rôle de l'hémisphère supérieur de W. L'objet étrange construit par Besicovitch est composé d'une sorte d'immeuble (qui sera noté D et sera la première partie de W) où l'on installe le chauffage central ; l'ensemble V des surfaces des tuyaux composera la seconde partie de W. On a donc $W = V \cup D$.

L'immeuble est obtenu en partant du cube unité A qui est décomposé en 8 cubes égaux, $A_1, \ldots, A_8$, (de côté un peu plus petit que $1/2$) séparés par des murs. Chacun de ces sous-cubes est lui-même décomposé en 8 cubes égaux et séparés par des murs. On obtient ainsi une suite décroissante d'ensembles compacts D_j (D_j est la réunion de 8^j petits cubes) et l'on suppose que les murs sont de plus en plus fins, de sorte que la mesure de l'intersection D des D_j soit $1/2$. Voici pour l'immeuble dans lequel on va installer le chauffage central. Les tuyaux vont être construits de sorte qu'en se subdivisant de plus en plus, ils finissent par atteindre n'importe quel point de D. Au départ, le gros tuyau V_0 amène l'eau chaude de l'extérieur. En pénétrant dans A, ce gros tuyau se scinde immédiatement en 8 petits tuyaux qui vont circuler dans les murs pour déboucher dans les 8 appartements différents $A_1, \ldots, A_8$, consituant la première approximation de l'immeuble. Après avoir pénétré dans ces appartements, chacun des 8 tuyaux se scinde en 8 plus petits tuyaux qui vont alimenter en eau chaude chacune des 8 pièces $A_{i,j}$ de l'appartement A_j. Les sections de tous les tuyaux sont carrées et un tuyau pénètre dans un cube à travers un petit carré dont le centre est le même que celui de la face correspondante.

On continue indéfiniment et chaque tuyau de la j-ième étape se scinde en 8 tuyaux encore plus fins. On obtient ainsi une tuyauterie dont la surface est notée V_j et l'on construit en même temps la représentation paramétrique Φ_j de V_j. Les V_j se terminent donc par 8^j tuyaux minuscules qui alimenteront autant de chambres de poupée à l'intérieur desquelles la construction continue. On appelle V la réunion des V_j, $j \geqslant 0$. C'est à ce propos que l'on demanda à Besicovitch s'il avait été plombier dans une vie antérieure. Comme nous l'avons dit, on peut organiser la pose des tuyaux pour que leurs branches indéfiniment continuées puissent atteindre n'importe quel élément de l'ensemble D. Il est facile de régler l'épaisseur des tuyaux pour que l'aire de leur surface V ne dépasse pas $\frac{1}{10}$. On montre sans peine que les Φ_j convergent uniformément vers une fonction continue Φ qui est définie sur le carré unité. Il en résulte qu'au sens de Lebesgue, la surface de $W = V \cup D$ ne dépasse pas $\frac{1}{10}$, puisque la distance entre W et V_j tend vers 0 quand j tend vers l'infini. Mais le volume de V est nul, celui de D est $1/2$ et donc celui de W est aussi $1/2$.

On obtient la contradiction désirée : la fermeture W de la tuyauterie V de

Besicovitch est à la fois une *surface* ayant une aire finie au sens donné par Lebesgue et un *volume* au sens de Hausdorff. On peut soit construire la partie symétrique, soit suivre Besicovitch et boucher l'origine du premier tuyau par un hémisphère. L'ensemble W est alors la frontière topologique d'un ensemble ouvert Ω homéomorphe à une boule tandis que W est une sphère dont la mesure de Lebesgue tri-dimensionnelle est positive (FIG. 2).

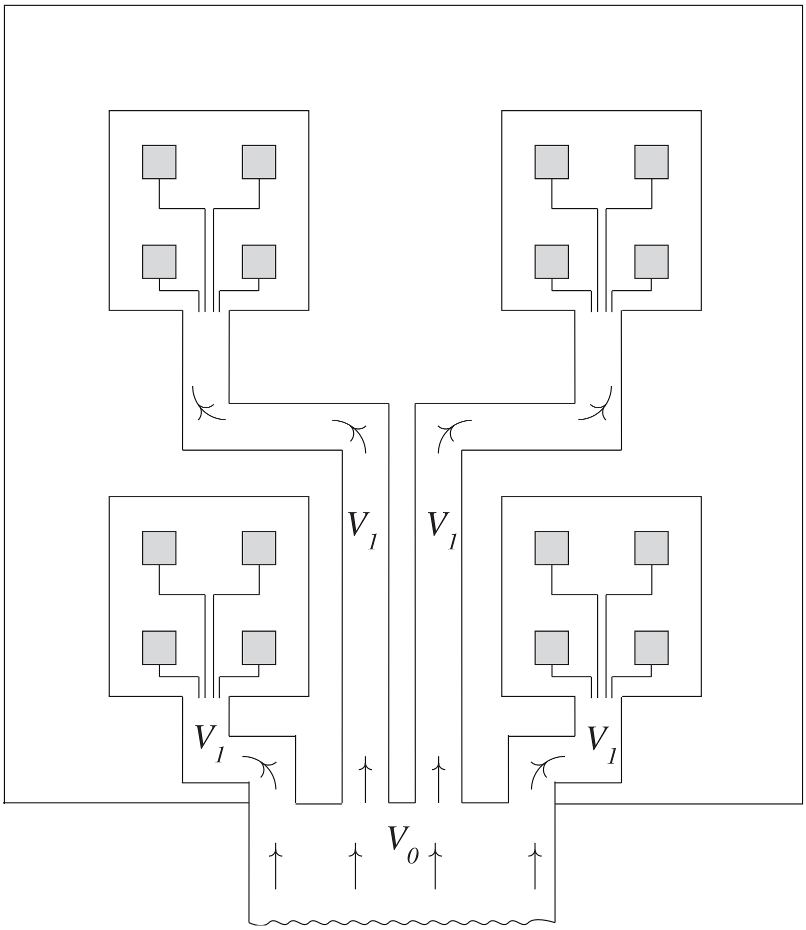

FIG. 2

On notera la similarité entre cette construction et celle d'une courbe de Jordan ayant une mesure positive. Pour construire une telle courbe, on part du carré unité D que l'on divise en quatre carrés D_j de côté $1/2$. On remplace alors ces quatre carrés par des carrés concentriques un peu plus petits de façon à amenager des murs. Ces quatre carrés forment l'ensemble E_1. On continue la construction à l'intérieur de chaque carré composant E_1 et l'on obtient l'ensemble E_2 qui se compose de 16 carrés. On peut conduire cette construction de sorte que l'on ait $|E_j| > 1/2$. On appelle E l'intersection de la suite décroissante des E_j. La courbe Γ est construite par approximations successives et nous ne traçons ici qu'un quart de Γ. On part du coin sud-ouest de D et l'on rejoint, par un segment, le coin sud-ouest du carré sud-ouest de E_1. On échappe de ce carré et de E_1 par le nord-est et l'on rentre à nouveau dans E_1 par le coin sud-ouest du carré nord-ouest. On en sort par le nord-est du même carré et l'on visite de même les deux autres carrés de E_1. On ne retouche plus à la partie de Γ qui est extérieure à E_1 et l'on précise alors ce qui se passe à l'intérieur de E_1. On procède à l'intérieur de chaque carré de E_1 en adoptant une similarité parfaite avec ce que nous venons de faire et l'on continue indéfiniment. La courbe limite n'a pas de point double. On ne repasse jamais par un endroit déjà visité. En revanche la courbe limite contient E (FIG. 3). Elle a donc une mesure positive.

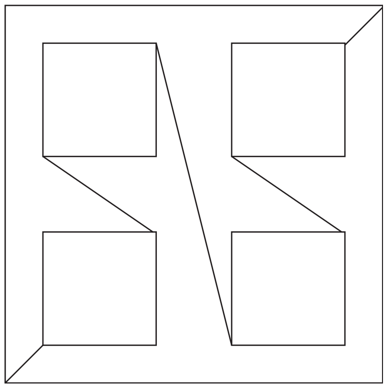

FIG. 3

4. Leonida Tonelli

Tonelli naquit à Gallipoli (Lecce), en 1885. Tonelli a fondé l'école italienne de calcul des variations et a contribué, par son énergie et son talent, à la renommée de l'École Normale Supérieure de Pise. Il mourut à Pise en 1946.

Tonelli répondit au problème posé par Jordan à Lebesgue en caractérisant l'espace BV des fonctions continues $f(x_1, x_2)$, définies dans le carré unité et dont le graphe Γ a, au sens de Lebesgue, une aire finie (notée $A(\Gamma)$). Ce graphe Γ est défini par $\{z = f(x, y),\ 0 \leqslant x, y \leqslant 1\}$. Tonelli réussit à donner un encadrement de $A(\Gamma)$ à l'aide de deux moyennes de longueurs de courbes tracées sur Γ. Plus précisément Tonelli démontra (Note aux CRAS du 10 mai 1926, référence [1]) que f appartient à BV si et seulement si les deux conditions suivantes sont réunies : (a) la variation totale $\beta(x_1)$ de la fonction $f(x_1, \cdot)$ est intégrable au sens de Lebesgue sur $[0, 1]$ et (b) la variation totale $\gamma(x_2)$ de la fonction $f(\cdot, x_2)$ est également intégrable sur $[0, 1]$. Tonelli ramena ainsi l'espace BV en deux variables à sa version unidimensionnelle. Écoutons Tonelli dans [1] :

> *« On a proposé plusieurs définitions pour l'aire d'une surface. La plus générale ... est la définition donnée par M. Lebesgue : L'aire d'une surface S est la plus petite limite des aires des surfaces polyédrales dont S est la limite...Je me bornerai ici aux surfaces $z = f(x, y)$ où $f(x, y)$ est une fonction continue donnée dans le*

carré $Q = \{0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\}$. *Je dirai qu'une fonction* $f(x, y)$ *est à variation bornée si :*

(1) pour presque toutes les valeurs de $\bar{x}$ *et* $\bar{y}$ *dans* $(0, 1)$, $f(\bar{x}, y)$ *et* $f(x, \bar{y})$ *sont des fonctions de* y *et de* x, *respectivement à variation bornée dans* $(0, 1)$;

(2) les variations totales de $f(\bar{x}, y)$ *et* $f(x, \bar{y})$ *dans* $(0, 1)$ *sont des fonctions intégrables (au sens de M. Lebesgue) de* $\bar{x}$ *et* $\bar{y}$ *dans* $(0, 1)$.

La condition nécessaire et suffisante pour que la surface $z = f(x, y)$ *soit quarrable est que la fonction* $f(x, y)$ *soit à variation bornée.* »

Pendant longtemps l'espace BV s'est appelé « l'espace BV au sens de Tonelli », car de nombreux mathématiciens proposaient une définition différente et pensaient que les fonctions à variation bornée en deux variables devaient être définies comme des différences entre deux fonctions croissantes. L'espace BV a des caractérisations beaucoup plus simples. Parlons d'abord comme Tonelli l'aurait fait, sans utiliser le formalisme mathématique. Considérons une fonction f définie dans le plan, translatons f et donc son graphe Γ par une translation horizontale y et mesurons le volume $V(y)$ compris entre le graphe initial Γ et le graphe translaté Γ_y. Alors f est à variation bornée si et seulement si l'on a : $V(y) \leqslant C|y|$ pour toute translation y. En termes plus actuels on dira : Une fonction définie dans tout le plan appartient à BV si et seulement si il existe une constante C telle que, pour tout vecteur y, on ait

$$\int |f(x + y) - f(x)|\, dx \leqslant C|y|.$$

Ce résultat vaut en toute dimension. Dans le cas où la fonction f est la fonction indicatrice d'un ensemble E, l'opération à faire pour évaluer la norme BV est pariculièrement simple. On déplace un peu E en le translatant par un vecteur y. On obtient ainsi un ensemble translaté E_y. On calcule la surface $\Delta(y)$ de la différence symétrique entre E et E_y. Finalement on divise cette aire $\Delta(y)$ par la longueur de y et l'on calcule le maximum de ces quotients. On obtient ainsi la norme BV de la fonction indicatrice de E, ce qui nous sert de transition avec l'œuvre de De Giorgi. Pensons à la surface extérieure d'une colonne de hauteur 1 dont E est la section. L'espace fonctionnel BV est le dual d'un autre espace fonctionnel. La boule unité de BV est donc faiblement compacte et la méthode directe du calcul des variations s'applique, comme le conjecturait Lebesque.

5. Ennio De Giorgi

De Giorgi naquit à Lecce, en 1928, et mourut à Pise, en 1996. Il a éclairé ce débat de façon très originale en donnant raison, en un sens, à Lebesgue. *Dans l'exemple, donné par Besicovitch, de l'ensemble ouvert* Ω *délimité par* W, *De Giorgi considère que l'on doit définir la « frontière » de* Ω *comme l'ensemble* V *des surfaces des tuyaux, en excluant l'ensemble* D. Cette frontière réduite sera nommée « frontière distinguée » par De Giorgi. Pour définir la frontière distinguée, De Giorgi part du point de vue de la formule de Stokes. Il cherche donc à calculer l'intégrale de volume $I(g) = \int_\Omega \mathrm{div} g(x) dx$ à l'aide d'une intégrale de surface lorsque $g = (g_1, g_2, g_3)$ où g_1, g_2 et g_3 sont trois fonctions arbitraires de classe C^1. Il s'attend à transformer l'intégrale de volume en une intégrale de surface portant sur le bord $\Gamma = \partial\Omega$ de Ω et à obtenir $I(g) = \int_\Gamma g \cdot n\, d\sigma$ où n est le vecteur unitaire normal dirigé vers l'extérieur et $d\sigma$ est l'élément de surface sur le bord Γ de Ω. Si l'on applique ce point de vue à l'exemple de Besicovitch, on obtient que $d\sigma$ est la mesure de surface sur V et ne charge donc pas l'ensemble D de mesure positive ; la formule de Stokes ignore la frontière topologique au profit de la frontière distinguée qui est beaucoup plus petite. La question suivante qui est posée est de savoir si, en toute généralité (l'ensemble Ω étant maintenant arbitraire) $d\sigma$ est une mesure, c'est-à-dire s'il existe une constante C telle que l'on ait $|I(g)| \leqslant C \sup\{|g(x)|;\, x \in \Gamma\}$. La frontière Γ est rectifiable au sens de De Giorgi si c'est le cas. De façon équivalente, il s'agit de savoir si la fonction indicatrice de Ω appartient à BV. Finalement De Giorgi définit dans [4] l'aire $A(\Gamma)$ du bord Γ de Ω comme la norme BV de la fonction indicatrice de Ω. La frontière distinguée de Ω est, par définition, le support de σ. La propriété de convergence imposée par Lebesgue a lieu : si une suite Ω_j converge vers Ω au sens de la convergence en mesure, alors on a bien $A(\Gamma) \leqslant \liminf A(\Gamma_j)$. Dans le texte qui suit, De Giorgi appelle « mesure de Carathéodory » ce que nous appelons aujourd'hui « mesure de Hausdorff ». De Giorgi écrit dans [4] :

> *« Per quanto riguarda la definizione di Carathéodory, si vede subito che essa fornisce in generale, per la misura della frontiera di un insieme, un valore maggiore del nostro, eventualmente infinito, quando il perimetro è finito, sicché tutte le frontiere di misura finita secundo Carathéodory sono tali secondo la nostra definizione e non viceversa. »*
>
> [En ce qui concerne la définition de Carathéodory, on voit tout de suite qu'en général elle fournit une valeur supérieure à la nôtre, éventuellement infinie, pour la mesure de la frontière d'un ensemble, alors même que le périmètre est fini ; de sorte que toute frontière de mesure finie au sens de Carathéodory est finie selon notre définition mais que la réciproque n'est pas vraie.]

6. Inégalités isopérimétriques

Les inégalités isopérimétriques répondent à un problème posé dès l'antiquité. Quelle est la plus grande surface que l'on puisse déployer à l'intérieur d'un contour de longueur donnée ? Une légende nous dit que la fondation de Carthage par Didon, la reine malheureuse, a été négociée en promettant de n'utiliser que la surface délimitée par une peau de bœuf. Didon a alors découpé cette peau de bœuf pour en faire une très fine lanière qui servit à entourer la surface de la ville. En trois dimensions nous voudrions savoir quel est le plus grand volume qui soit délimité par une surface d'aire donnée ? Ecrire ce problème nécessite de savoir ce que vaut une aire. De Giorgi nous apprend dans [4] que, si S est l'aire du « bord distingué » $\partial^* E$ d'un ensemble borélien E, alors le volume $|E|$ de E vérifie toujours $|E| \leqslant cS^{3/2}$ où $c = \frac{1}{6\sqrt{\pi}}$. Ce résultat est remarquable parce qu'il est optimal : on ne peut faire mieux, car on a égalité si E est une boule. En outre dans le membre de droite ne figure que l'aire du bord distingué de E et non pas celle de la frontière de E. Cette dernière est bien plus grande et souvent infinie, ce qui affaiblirait le résultat.

Là encore, le point de vue des inégalités isopérimétriques donne raison à Lebesgue contre Besicovitch.

7. Le traitement de l'image

S. Osher, L. Rudin et E. Fatemi ont découvert une application aussi belle qu'inattendue des réflexions précédentes. Commençons par dire quelques mots des images digitales. Le niveau de gris en un point (x, y) d'une image en noir et blanc est un nombre compris entre 0 (noir) et 1 (blanc). Le plus souvent ce niveau de gris $f(x, y)$ est échantillonné sur 8 bits correspondant à 256 niveaux de gris. En outre le *pixel* (x, y) n'est pas un point arbitraire. Il appartient à une grille et les caméras numériques proposent, à l'heure actuelle, environ dix millions de pixels. Dans le cas d'une image en couleur, f devient un vecteur (f_1, f_2, f_3) utilisant trois couleurs primaires. Bien entendu, très peu de fonctions f proviennent d'images naturelles et le premier et le plus difficile problème du traitement de l'image consiste à en savoir plus : comment modéliser les images naturelles ? Le niveau de gris f est une fonction très structurée et cette structure n'est évidemment pas reliée à la régularité. L'éclairage est très irrégulier. Il y a une première source d'irrégularité dont l'origine vient de la géométrie du monde qui nous entoure ; l'éclairage des objets varie brutalement et ces variations sont dues aux bords des objets ou à des phénomènes d'occlusions. Une seconde source vient du bruit ou des fines textures que l'on rencontre dans toutes les images. Un second problème lui est apparenté : peut-on décomposer une image digitale f en la somme $f = u + v$ de deux composantes u et v de sorte que les objets contenus dans l'image constituent la première composante u tandis que v contienne les textures et le bruit ? Comment opérer cette décomposition ? Comment reconnaître et extraire les formes contenues dans l'image ? Osher, Rudin et Fatemi définissent la décomposition $f = u + v$ en minimisant la fonctionnelle $J(u) = \|u\|_{BV} + \lambda\|v\|_2^2$ où λ est un paramètre positif qui demande à être réglé avec soin. En effet les objets dont la taille est inférieure à $\frac{1}{2\lambda}$ sont incorporés dans la composante v par l'algorithme. Il est facile de justifier le rôle de l'espace BV dans ce problème. En fait les contours jouent un rôle essentiel en traitement de l'image. Faire un croquis revient à dessiner certains contours. Les contours doivent avoir une longueur finie sinon ils ne pourraient être dessinés. Si l'on considère le cas particulier d'une image dont l'éclairement ne prendrait qu'un nombre fini de valeurs, l'exigence que les contours soient de longueur finie signifie précisément que l'image digitale appartienne à BV.

Mumford et Shah proposèrent un autre modèle dont l'étude mathématique est conduite dans [6]. Dans le modèle de Mumford et Shah, l'image digitale est définie sur un carré Ω et la composante u appartient au sous-espace SBV de BV ; ce sous-espace se compose des fonctions u de BV qui représentent le mieux des images, au sens que u n'est « très irrégulière » que sur un ensemble singulier K de dimension de Hausdorff égale à 1. Alors les conditions imposées sur la composante $u(x)$ affectent deux termes. Le premier terme est la mesure de Hausdorff unidimensionnelle de K. Le second terme est la valeur quadratique moyenne du gradient de $u(x)$ calculé sur le complémentaire de K dans Ω. Le troisième terme composant la fonctionnelle $J(u)$ de Mumford et Shah est « la fidélité aux données », c'est-à-dire la valeur quadratique moyenne de la différence v entre f et u. La fonctionnelle que l'on cherche à minimiser est donc

$$J(u) = \int_{\Omega \setminus K} |\nabla u|^2 \, dx + \alpha H^1(K) + \beta \|v\|_{L^2}^2$$

où $H^1(K)$ est la mesure de Hausdorff uni-dimensionnelle.

Les deux paramètres α et β doivent être réglés avec soin. Comme c'est le cas pour le modèle d'Osher et Rudin, si α est trop petit, trop de morceaux de l'image seront pris pour des objets. Ce modèle pose des problèmes mathématiques très intéressants qui ont beaucoup de lien avec la théorie des surfaces minimales [6].

Je voudrais conclure cet exposé en reprenant à mon compte les propos d'Alain Aspect, médaille d'or du CNRS : des problèmes portant sur les fondements des sciences et qui pourraient sembler relever de la métaphysique peuvent avoir les applications les plus inattendues et les plus pratiques.

8. Références

1. La page qui a servi à définir cette conférence est la Note aux CRAS de Leonida Tonelli, présentée par Jacques Hadamard, le 10 mai 1926, et intitulée « Sur la quadrature des surfaces ». Cette note fournit la première définition de l'espace *BV* des fonctions à variation bornée. Pendant longtemps les analystes disaient encore « *BV* au sens de Tonelli. » La note de Tonelli répondait à un problème posé par Henri Lebesgue. Il s'agissait de généraliser aux surfaces le fait bien connu par Lebesgue qu'une courbe plane est de longueur finie si et seulement si elle est paramétrée par une fonction à variation bornée. Le piège qui a égaré les analystes est le fait que toute fonction, d'une variable réelle, à valeur réelle, qui est à variation bornée est la différence entre deux fonctions croissantes ; c'est ce résultat qu'ils cherchèrent en vain à généraliser aux surfaces.

2. Le second texte fondateur est l'article de Felix Hausdorff intitulé « Dimension und äusseres Mass », Math. Ann. vol. 79 (1918) 157-179. Dans cet article Hausdorff définit la « mesure de Hausdorff » et la dimension d'un ensemble.

3. Le troisième héros de cette histoire est A. S. Besicovitch et l'article qui est discuté ici est « On the definition and value of the area of a surface », Quart. J. Math. vol 16 (1945) 86-102.

4. Le quatrième homme est Ennio De Giorgi et l'article fondateur est « Su una teoria generale della misura (r-1)-dimensionale in uno spacio ad r dimensioni. » Annali di mat. pura e appl. Ser.4, vol. 36 (1954) 191-213.

5. David Mumford, Leonid Rudin, Stanley Osher et Emad Fatemi ont été les pionniers de l'introduction de l'espace *BV* en traitement de l'image. Les références sont : (1) David Mumford and Jayant Shah. *Boundary detection by minimizing functionals*. Proc. IEEE Conf. Comp. Vis. Pattern Recognition, 1985. (2) D. Mumford and J. Shah. *Optimal representations by piecewise smooth functions and associated variational problems.* Comm. Pure Applied Mathematics, 42 (5) (1989) 577-685. (3) Stanley Osher and Leonid Rudin. *Total variation based image restoration with free local constraints*. In Proc. IEEE ICIP, vol I, pages 31-35, Austin (Texas) USA, Nov.1994. (4) Stanley Osher, Leonid Rudin and Emad Fatemi. *Nonlinear total variation based noise removal algorithms.* Physica D, 60 (1992) 259-268.

6. Le livre de référence sur la conjecture de Mumford-Shah est aujourd'hui le traité de Guy David, intitulé *Singular Sets of Minimizers for the Mumford-Shah Functional*, Birkhäuser, 2005.

7. Les amateurs de géométrie fractale doivent lire : *Fractal Geometry, Mathematical Foundations and Applications,* par Kenneth Falconer, John Wiley & Sons, 2000 ou bien : *Geometry of Sets and Measures in Euclidean Spaces : Fractals and Rectifiability,* Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **44,** par Pertti Mattila, Cambridge University Press (1995). On consultera aussi *Geometric Measure Theory, A beguinner's guide* par Frank Morgan, Academic Press (1988).

8. Commentaires de Jean-Michel Morel :

> « Je suis enchanté d'apprendre que Besicovitch avait conçu ses contre-exemples comme des systèmes de tuyauterie. C'est en partant de cet exemple, sans savoir qu'il était dû à Besicovitch, que Caselles et moi avons commencé à travailler sur les « ouverts irrigants ». Finalement on avait laissé cette voie pour le modèle d'irrigation simplifié que tu as vu dans la thèse de Bernot. J'adore les trois articles de Besicovich que j'ai lus dans le texte original, ils sont d'une astuce stupéfiante. Je peux t'en dire un peu plus sur *BV* et Mumford-Shah. C'est De Giorgi qui a diagnostiqué la présence de *BV* dans le modèle de Mumford-Shah. Mumford et Shah ignoraient complétement *BV*. Solimini et moi-même avions fait connaître à De Giorgi la conjecture de Mumford-Shah. Mais De Giorgi avait antérieurement formulé une conjecture plus générale. Il appelait ce type de problème « problème à discontinuité libre » et il s'inspirait de la fracturation et des cristaux liquides. Très élégamment il a adopté le nom de conjecture de Mumford-Shah alors que ce n'était qu'un cas particulier de son propre programme. Quant aux italiens ils étaient tellement saturés de conjectures de De Giorgi qu'ils étaient contents que l'une d'entre elles reçoive un nom venant d'ailleurs. C'est Leonid Rudin qui a eu le premier l'idée d'utiliser *BV* pour les images. Il s'inspirait d'un article de Kronrod qui contient la plupart des idées de la morphologie mathématique. »

9. Roger Temam a étudié, pour les besoins de la plasticité, les espaces $BD(\Omega)$ - pour bounded deformation - espaces introduits par Pierre Suquet pour ce qu'on appelle le modèle de plasticité de Hencky - qui est en fait un modèle d'élasticité non linéaire. Ces espaces sont des généralisations naturelles de l'espace *BV*. Les références sont :

G. Strang et R. Temam, *Existence de solutions relaxées pour les équations de la plasticité : étude d'un espace fonctionnel*, C. R. Acad. Sc. Paris, Série A, 287, 1978, 515-518.

G. Strang et R. Temam, *Functions of bounded deformations*, Arch. Rational Mech. Anal., 75, 1980, 7-21.

G. Strang et R. Temam, *Duality and relaxation in the variational problems of plasticity*, J. Mécanique, 19, 1980, 493-527. (Avec une préface de Paul Germain).

10. La critique adressée par Jordan à Lebesgue se trouve, page 163, de « Quelques remarques sur la définition de l'aire des surfaces », Fundamenta Mathematicae, VIII, 160-165, 2 octobre 1925. On consultera également « Sur la définition de l'aire des surfaces », H. Lebesgue, L'enseignement mathématique, (1908), 212-220.