Feuille 5

Exercice 1. Soient $1 \leq p \leq q \leq +\infty$.

1. Montrer que si $\mu(X) < +\infty$ alors $L^q(X,\mu) \subset L^p(X,\mu)$.
2. Montrer que si $p < r < q$ alors $L^p(X,\mu) \cap L^q(X,\mu) \subset L^r(X,\mu)$.
3. Montrer que si (u_n) est une suite appartenant à $\ell^p(\mathbb{N})$ alors $\|u\|_q \leq \|u\|_p$. En déduire une inclusion portant sur les espaces $\ell^p(\mathbb{N})$ et $\ell^q(\mathbb{N})$. Montrer que cette inclusion est stricte si $p < q$.

Exercice 2. Soit $\|\cdot\|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^d$. À quelle condition sur α la fonction $x \mapsto 1/(1+\|x\|^\alpha)$ appartient-elle à $L^p(\mathbb{R}^d,\lambda)$ (où λ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$) ?

Exercice 3. Donner un exemple de fonction qui soit dans tous les $L^p(\mathbb{R})$ pour $p \in [1,+\infty[$ mais pas dans $L^\infty(\mathbb{R})$ (pour la mesure de Lebesgue).

Exercice 4. Soit $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$. Pour $x > 0$ on pose $F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$.

1. Démontrer que $\left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\right)^2 \leq 2\sqrt{x}\int_0^x \sqrt{t}|f(t)|^2 dt$.
2. En déduire que $\|F\|_2| \leq 2\|f\|_2$.

Exercice 5. Soient $(X,\mathcal{A},\mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(X) = 1$ et f une fonction mesurable à valeurs dans $\mathbb{C}$.

1. Montrer que $\|f\|_p \leq \|f\|_q$ lorsque $p \leq q$.
2. Soient $\epsilon > 0$ et $A = \{x \in X \ / \ |f(x)| \geq \|f\|_\infty - \epsilon\}$. Montrer que
$$\int_X |f|^p \, d\mu \geq (\|f\|_\infty - \epsilon)^p \, \mu(A).$$
3. En déduire que $\|f\|_\infty = \lim_{p\to+\infty} \|f\|_p$.
4. Que se passe-t-il si $\mu(X)$ n'est plus supposé fini ?

Exercice 6. Etant donné un réel $h > 0$, on note $\phi_h = 1_{[-h,h]}$ la fonction indicatrice de l'intervalle $[-h,h]$.

1. Calculer $\phi_h * \phi_1$. (On pourra supposer $h \leq 1$)
2. Etudier le comportement en tout point $t \in \mathbb{R}$ de $\frac{1}{2h}(\phi_h * \phi_1)(t)$, quand h tend vers zéro par valeurs > 0.

Exercice 7.

1. En utilisant une fonction $h \geq 0$, indéfiniment dérivable, à support compact, positive ou nulle et non identiquement nulle, construire une suite de fonctions indéfiniment dérivables formant une identité approchée $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Utiliser les fonctions h_n pour montrer que toute fonction f continue est limite, uniformément sur tout intervalle compact, de fonctions indéfiniment dérivables.

Exercice 8. *Une application de la convolution*
Pour $n \geq 0$, on considère les fonctions g_n définies par
$$g_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{c_n}(1-x^2)^n, \text{ pour } |x| \leq 1, \\ 0, \text{ sinon} \end{cases}$$
où
$$c_n = \int_{-1}^1 (1-x^2)^n \, dx.$$

1. Montrer la minoration $c_n > \dfrac{1}{n+1}, n \geq 0$.
2. Montrer que la famille $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forme une identité approchée, au sens de la convolution sur $\mathbb{R}$.
3. Soit f intégrable. Etudier la convergence de la suite $(f * g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, si f est supposée :
   - continue,
   - uniformément continue.
4. Montrer que, si f est nulle en dehors de $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, la restriction de $f * g_n$ à $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$ coïncide avec un polynôme.
5. On considère une fonction f définie et continue sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. En utilisant ce qui précède, obtenir une preuve du théorème de Weierstrass : *toute fonction continue sur un intervalle compact $[a, b]$ est limite uniforme de polynômes sur [a,b].*

Exercice 9. Posons

$$\phi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}$$

1. Montrer que
$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0.$$
2. Soit f une fonction continue bornée sur $\mathbb{R}$. Montrer que
$$F(x,t) = \int_{\mathbb{R}} \phi(x-y) f(y)\ dy$$
est bien définie pour $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ et que
$$\lim_{t\to 0} F(x,t) = f(x).$$
3. Montrer que F est deux fois dérivable par rapport à x et une fois par rapport à t sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ et que
$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{\partial F}{\partial t} = 0.$$

Exercice 10. *$(\mathcal{C}_c(\mathbb{R}),\ *\ )$, $(L^1(\mathbb{R}),\ *\ )$ n'ont pas d'unité*
Soit u une fonction positive continue d'intégrale 1 à support compact inclus dans $[-1, 1]$. Pour h un réel > 0, on définit les fonctions u_h définies par :

$$u_h(t) \ = \frac{1}{h} u(t/h).$$

Soit $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$, l'espace des fonctions continues à support compact sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que l'on a, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$, $\lim_{h\to 0} f * u_h = f$, la limite étant uniforme.
2. En utilisant ce résultat, prouver que l'algèbre de convolution $(\mathcal{C}_c(\mathbb{R}),\ *)$ n'a pas d'unité. [[*Indications :* On supposera qu'une telle fonction f_0 existe. On a : $\lim_h f_0 * u_h = f_0$, mais aussi, si f_0 est une unité pour la convolution : $f_0 * u_h = u_h$. Comme $\lim_{h\to 0} u_h(t) = 0$, pour $t \neq 0$, ceci est impossible.]]
3. Etendre ce résultat à $L^1(\mathbb{R})$.