Feuille 4

Exercice 1. 1. Montrer que $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \bigotimes \mathcal{P}(\mathbb{N}) = \mathcal{P}(\mathbb{N}^2)$.

2. Si μ est la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$ montrer que $\mu \bigotimes \mu$ est la mesure de comptage sur $\mathbb{N}^2$.
3. On considère une suite à deux indices $(u_{i,j})$. Montrer que si les nombres $u_{i,j}$ sont positifs ou nuls alors
$$\sum_{i=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} u_{i,j} \right) = \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\sum_{i=0}^{+\infty} u_{i,j} \right).$$
4. Trouver un exemple de suite $(u_{i,j})$ telle que
$$\sum_{i=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} u_{i,j} \right) \neq \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\sum_{i=0}^{+\infty} u_{i,j} \right).$$

Exercice 2. Trouver une fonction f borélienne de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ telle que
$$\int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} f(x,y)\ dx \right)\ dy \neq \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} f(x,y)\ dy \right)\ dx,$$
alors que ces deux quantités sont définies et finies.

Exercice 3. Soit $f\ :\ \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne et $\Gamma = \{(x, f(x))\ /\ x \in \mathbb{R}^d\}$ son graphe.

1. Montrer que Γ est une partie borélienne de $\mathbb{R}^{d+1}$.
2. Montrer que Γ est de mesure nulle pour la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^{d+1}$.

Exercice 4. 1. Calculer
$$\int\int_D \frac{dx\ dy}{(1+y)(1+x^2y)},$$
où $D = \{(x,y)\ /\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$.

2. En déduire
$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2-1}\ dx = \frac{\pi^2}{4}.$$
3. Calculer
$$\int\int\int_D \frac{dx\ dy\ dt}{(1+x^2t^2)(1+y^2t^2)},$$
où $D = \{(x,y,t)\ /\ x \in [0,1],\ y \in [0,1],\ t \geq 0\}$.
2. En déduire
$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\arctan t}{t} \right)^2\ dt = \pi \ln 2.$$

Exercice 5. 1. Calculer l'intégrale
$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\ dx\ dy.$$

2. En déduire la valeur de
$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}}\ dx.$$

Exercice 6. La boule euclidienne de rayon $R > 0$ en dimension $d \in \mathbb{N}^*$ est définie par

$$B_d(0, R) = \{x \in \mathbb{R}^d \ /\ x_1^2 + \dots x_d^2 \leq R^2\}.$$

1. Calculer le volume (c'est-à-dire la mesure pour la mesure de Lebesgue λ_d sur $\mathbb{R}^d$) de $B_d(0, R)$ pour $d = 1, 2, 3$.
2. Montrer que $\lambda_d(B_d(0, R)) = R^d \lambda_d(B_d(0, 1))$.
3. Montrer que
$$\lambda_d(B_d(0, 1)) = 2I_d\lambda_{d-1}(B_{d-1}(0, 1)),$$
où $I_d = \int_0^1 (1 - y^2)^{\frac{d-1}{2}}\ dy$.
4. Montrer que
$$I_d = \int_0^{\pi/2} \sin^d(\theta)\ d\theta.$$
5. Montrer que
$$I_{d+2} = \frac{d+1}{d+2} I_d.$$
6. Montrer que $I_d I_{d+1} = \frac{\pi}{2(d+1)}$.
7. En déduire
$$\lambda_{2d+1}(B_{2d+1}(0, R)) = \frac{2^{2d+1} d! \pi^d}{(2d+1)!} R^{2d+1}, \quad \lambda_{2d}(B_{2d}(0, R)) = \frac{\pi^d}{d!} R^{2d}.$$
8. Comparer $\lambda_d(B_d(0, R))$ et $\lambda_d(B_d(0, R(1 - \epsilon)))$. Que se passe-t-il lorsque d tend vers l'infini ?

Exercice 7. On considère l'application ϕ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$\phi(x, y, z) = (x, xy\cos(z), y\sin(z)).$$

1. Montrer que ϕ est un C^1-difféomorphisme de $\Delta =]0, 1[^2 \times] - \pi, \pi[$ sur son image $\phi(\Delta)$.
2. Calculer $\lambda_3(\phi(\Delta))$.

Exercice 8. On considère l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$\phi(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy).$$

Calculer l'aire de $\phi(D)$ où D est le disque centré en $(0, 0)$ de rayon 2.