# Feuille 3

**Exercice 1.** Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, $f$ et $g$ deux fonctions définies sur $X$ à valeurs dans un espace mesurable $(Y, \mathcal{B})$. Montrer que si $f$ et $g$ sont égales presque partout et si $f$ est mesurable, alors $g$ est mesurable pour la tribu complétée de $\mathcal{A}$ (pour $\mu$).

**Exercice 2.** Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite, c'est-à-dire une fonction définie sur $\mathbb{N}$. Montrer que cette fonction est intégrable pour la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$ si et seulement si la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est absolument convergente.

**Exercice 3.** Soient $f$ une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $a < b$ deux réels.

1. Rappeler la définition de l'intégrale de Riemann
$$\int_a^b f(t)\ dt.$$
2. Montrer que $f\mathbf{1}_{[a,b]}$ est intégrable pour la mesure de Lebesgue (notée $\lambda$) sur $\mathbb{R}$ et que
$$\int_{\mathbb{R}} f\mathbf{1}_{[a,b]}\ d\lambda = \int_a^b f(t)\ dt.$$

**Exercice 4.** Soit $f$ une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que la fonction $f$ est intégrable pour la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ si et seulement l'intégrale de Riemann généralisée
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt$$
converge absolument et qu'on a alors
$$\int_{\mathbb{R}} f\ d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt.$$

**Exercice 5.** Pour tout nombre entier naturel $n$ on pose
$$f_n(x) = 0 \text{ si } x \notin [0,n],\ (1+\frac{x}{n})^n e^{-2x} \text{ pour } x \in [0,n].$$

1. Justifier que $f_n$ est mesurable.
2. Calculer $\lim_n f_n$.
3. Calculer $\lim_n \int_0^n (1+\frac{x}{n})^n e^{-2x}\ dx$.

**Exercice 6.**

1. Montrer que l'intégrale
$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{e^x - 1}\ dx$$
est convergente.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \geq 0$ on pose $f_n(x) = x^2 \sum_{k=1}^n e^{-kx}$. Calculer la limite de $f_n(x)$ quand $n$ tend vers l'infini.

3. Montrer que
$$\lim_n \int_0^{+\infty} f_n(x)\ dx = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{e^x-1}\ dx.$$
4. Montrer que
$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{e^x-1}\ dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{k^3}.$$

**Exercice 7.** 1. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer
$$I_n = \int_0^1 x^n \ln x\ dx$$

2. En déduire
$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x}\ dx \text{ et } \int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2}\ dx.$$

**Exercice 8.** Montrer l'égalité
$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x}\ dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

**Exercice 9.** 1. Soient $\alpha$ et $\beta$ deux nombres réels strictement positifs. Montrer que
$$\int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x^\beta} = \sum_0^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha+\beta n}.$$

2. En déduire que
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+n} = \ln 2 \text{ et } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

**Exercice 10.** Déterminer les limites des suites $(u_n)$ pour

1. $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{k^2+nk+1}$,
2. $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{\sin k}{k^2} \left(\frac{k}{k+1}\right)^n$,
3. $u_n = \int_0^1 \frac{1+nx^3}{(1+x^2)^n}\ dx$,
4. $u_n = \int_0^1 \frac{\sin \pi x}{1+x^n}\ dx$.

**Exercice 11.** On considère la fonction
$$F(t) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+x^2}\ dx.$$

1. Pour quelles valeurs de $t$ $F(t)$ est-elle bien définie ?
2. Montrer que $F$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
3. Montrer que $F$ est dérivable deux fois sur $\mathbb{R}_+^*$ et qu'elle est solution de l'équation différentielle
$$y''(t) + y(t) = \frac{1}{t}.$$