Feuille 2

Exercice 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on considère la tribu

$$\mathcal{A}_n = \sigma(\{\{0\}, \{1\}, \{2\}, \dots, \{n\}\}) \subset \mathcal{P}(\mathbb{N}).$$

Montrer qu'on définit ainsi une suite croissante de tribus. Montrer que la réunion des $\mathcal{A}_n$ n'est pas une tribu.

Exercice 2. Décrire la tribu de $\mathbb{R}$ engendrée par l'ensemble des singletons de $\mathbb{R}$.

Exercice 3. Soit f une application affine de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ donnée par la formule $f(x) = \alpha x + \beta$ où α et β sont deux nombres réels avec $\alpha \neq 0$. Montrer que A est un borélien si et seulement si $f(A)$ est un borélien.

Exercice 4. Montrer que la mesure de Lebesgue λ est invariante par translation, c'est-à-dire que, pour tout borélien A et tout nombre réel x, on a $\lambda(A + x) = \lambda(A)$, où $A + x = \{a + x \ / \ a \in A\}$.

Exercice 5. Soit μ l'application qui à une partie A de $\mathbb{R}$ associe le cardinal (éventuellement infini) de $A \cap \mathbb{Q}$. Montrer que μ définit une mesure sur la tribu $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. Montrer que cette mesure est σ-finie.

Exercice 6. Soient X, Y deux ensembles, f une application de X dans Y, (A_i) une famille de parties de X, (B_i) une famille de parties de Y. Comparer

1. $f(\cup_i A_i)$ et $\cup_i f(A_i)$,
2. $f(\cap_i A_i)$ et $\cap_i f(A_i)$,
3. $f^{-1}(\cup_i B_i)$ et $\cup_i f^{-1}(B_i)$,
4. $f^{-1}(\cap_i B_i)$ et $\cap_i f^{-1}(B_i)$,
5. $f({}^c A_i)$ et ${}^c f(A_i)$,
6. $f^{-1}({}^c B_i)$ et ${}^c f^{-1}(B_i)$.

Exercice 7. Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable. Soit μ une application définie sur $\mathcal{A}$ à valeur dans $[0, +\infty]$ telle que :

+ $\mu(\emptyset) = 0$,
+ si A et B sont deux éléments disjoints de $\mathcal{A}$, alors $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$,
+ si $(A_n)_n$ est une suite croissante d'éléments de $\mathcal{A}$, alors $\mu(\cup_{n \geq 0} A_n) = \lim_n \mu(A_n)$.

Montrer que μ est une mesure sur $\mathcal{A}$.

Exercice 8. Soit $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels telle qu'il existe $c > 0$ satisfaisant $cn \leq \lambda_n$ à partir d'un certain rang.
Pour quelles valeurs réelles de x la série

$$\sum_{n \geq 0} n^2 e^{-\lambda_n x}$$

converge-t-elle ? On note $\phi(x)$ la somme de la série (quand elle converge).
Donner une condition simple sur $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ assurant que ϕ est dérivable sur son ensemble de définition.

Exercice 9. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1/x$ si $x \neq 0$, $f(0) = 0$ est borélienne.

Exercice 10. Montrer qu'une fonction monotone de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est borélienne.

Exercice 11. Si A est une partie d'un ensemble X, on note $\mathbf{1}_A$ la fonction définie sur X valant 1 en les points de A, 0 ailleurs.

1. Montrer que $A \subset B$ est équivalent à $\mathbf{1}_A \leq \mathbf{1}_B$, que $A = B$ est équivalent à $\mathbf{1}_A = \mathbf{1}_B$.
2. Montrer que $\mathbf{1}_A \mathbf{1}_B = \mathbf{1}_{A\cap B}$ et $1 - \mathbf{1}_A = \mathbf{1}_{^cA}$.
3. Montrer que si A et B sont disjoints, alors $\mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B = \mathbf{1}_{A\cup B}$.
4. Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable. Montrer que $A \subset B$ est mesurable si et seulement si $\mathbf{1}_A$ est mesurable.

Exercice 12. Soient f et g deux fonctions mesurables définies d'un espace mesurable $(X, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Montrer que les ensembles $\{f < g\}$, $\{f \geq g\}$, $\{f = g\}$ sont $\mathcal{A}$-mesurables.

Exercice 13. Soient f et g deux fonctions mesurables définies d'un espace mesurable $(X, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. On dit que f et g sont égales μ-presque partout si

$$\mu(\{x \ / \ f(x) \neq g(x)\}) = 0.$$

1. Montrer que si $f_1 = g_1$ μ-presque partout et $f_1 = g_1$ μ-presque partout, alors $f_1 + f_2 = g_1 + g_2$ μ-presque partout.
2. Généraliser à n couples de fonctions égales p.p., puis à un nombre dénombrable de tels couples.

Exercice 14. Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables définies d'un espace mesurable $(X, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

1. Montrer que $\inf_n f_n$ et $\sup_n f_n$ sont mesurables.
2. Montrer que $\liminf_n f_n$ et $\limsup_n f_n$ sont mesurables.

Exercice 15. Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables définies d'un espace mesurable $(X, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Montrer que l'ensemble $\{x \ / \ \lim_n f_n(x) \text{ existe}\}$ est $\mathcal{A}$-mesurable.

Exercice 16. Supposons que la mesure de Lebesgue puisse être prolongée à $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$. Nous allons en déduire une absurdité. Définissons sur $\mathbb{R}$ la relation binaire suivante :

$$x \sim y \text{ si } x - y \in \mathbb{Q}.$$

1. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence.
2. En utilisant l'axiome du choix, construire un ensemble $A \subset [0, 1]$ qui contient un point exactement dans chaque classe d'équivalence de $\sim$.
   Axiome du choix : Pour tout ensemble E non vide, il existe une application ϕ : $\mathcal{P}(\mathbb{E}) \to E$, telle que, pour toute partie $A \subset E$ non vide, $\phi(A) \in A$.
3. Si r et q sont deux nombres rationnels différents, déterminer $(A + r) \cap (A + q)$.
4. Montrer que $[0, 1] \subset \cup_{r\in\mathbb{Q}\cap[-1,1]}(A + r) \subset [-1, 2]$ et conclure.