Feuille 1

Exercice 1. Soit X un ensemble de cardinal n. Montrer que $\mathcal{P}(X)$ est de cardinal 2^n.

Exercice 2. Montrer que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable, que $\mathbb{N}^p$ est dénombrable.

Exercice 3. Montrer que $[0,1]$ n'est pas dénombrable.

Exercice 4. Montrer que la limite supérieure d'une suite bornée est sa plus grande valeur d'adhérence, que sa limite inférieure est sa plus petite valeur d'adhérence.

Exercice 5. Montrer que la série $[u_n]$ converge et calculer sa somme pour :

$$u_n = \ln(1 - 1/n^2),\ n \geq 1 \quad u_n = \frac{1}{n(n+1)} \quad u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

$$u_n = (n+1)^{1/(n+1)} - n^{1/n} \quad u_n = \arctan\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right) \quad u_n = \ln\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}$$

Exercice 6. Montrer que la série $[u_n]$ diverge pour :

$$u_n = (-1)^n \qquad u_n = \sqrt{n}\ln\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1}.$$

Exercice 7. Soient $[u_n]$ et $[v_n]$ deux séries convergentes de termes généraux positifs. Montrer que la série de terme général $\sqrt{u_n v_n}$ est convergente. Même question pour $w_n = u_n^{1/p} v_n^{1/q}$ où p et q sont strictement plus grand que 1 tels que $1 = 1/p + 1/q$.

Exercice 8. Déterminer la nature des séries de terme général u_n lorsque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est l'une des suites suivantes. Lorsque u_n dépend d'un paramètre on discutera suivant les valeurs de ce paramètre.

$$u_n = \frac{1}{n^{n+2}} \qquad u_n = \left(\frac{2n-1}{n+1}\right)^{2n} \qquad u_n = \frac{(-1)^n}{\tan n}$$

$$u_n = \frac{n!}{n^{n-p}} \qquad u_n = \frac{n+\sqrt{n}}{n^3+1} \qquad u_n = \left(1 + (-1)^n/\sqrt{n}\right)^{1/2} - 1$$

$$u_n = \frac{1}{n n^{1/n}} \qquad u_n = n^2 e^{-\sqrt{n}} \qquad u_n = \left(1 + (-1)^n/\sqrt{n}\right)^{1/2} - 1$$

$$u_n = e - (1+1/n)^n \qquad u_n = \frac{n^n}{(n+1)(n+2)\dots 2n} \qquad u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$$

$$u_n = \left(\frac{n+a}{n+b}\right)^{n^2} \qquad u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}\right) \qquad u_n = (-1)^n \sin\left(\frac{\sqrt{n+1}}{n}\right)$$

$$u_n = \frac{1+(-1)^n n^\alpha}{n^{2\alpha}} \qquad u_n = \frac{(-1)^n}{n^{2/3} + \cos n} \qquad u_n = e^{(-1)^n\sqrt{n}} - 1$$

Exercice 9. Montrer que la série de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^x}$, pour x réel, converge si et seulement si $x > 1$. On définit ainsi une fonction

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}.$$

Montrer que ϕ est dérivable sur $]1, +\infty[$ et donner une expression de sa dérivée.

Exercice 10. Montrer que l'intégrale

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt$$

converge pour $x > 0$. Montrer que Γ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et donner une expression de sa dérivée.

Exercice 11. Montrer que l'intégrale

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$$

converge, mais ne converge pas absolument. Pour un nombre réel $\lambda \geq 0$, on considère l'intégrale

$$f(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} \frac{\sin x}{x}\, dx.$$

Montrer que cette intégrale converge pour tout $\lambda \geq 0$, définit une fonction f continue sur $[0, +\infty[$, dérivable sur $]0, +\infty[$. Donner une expression intégrale de f'. Calculer f', en déduire f puis la valeur de l'intégrale I.

Exercice 12. Soit $(A_n)_n$ une suite de parties d'un ensemble Ω. Montrer que

$$\limsup A_n = \cap_{n\in\mathbb{N}} \cup_{p\geq n} A_p$$

est l'ensemble des éléments de Ω qui appartiennent à une infinité de A_n. Montrer que

$$\liminf A_n = \cup_{n\in\mathbb{N}} \cap_{p\geq n} A_p$$

est l'ensemble des éléments de Ω qui appartiennent à tous les A_n à partir d'un certain rang. Montrer que $\liminf A_n \subset \limsup A_n$.

Exercice 13. L'intersection de deux tribus est-elle une tribu ? Et la réunion ?

Exercice 14. Soit $(\mathcal{A}_n)$ une suite croissante d'algèbres. Montrer que la réunion des $\mathcal{A}_n$ est une algèbre. Même question pour une suite croissante de tribus.

Exercice 15. Montrer que les ensembles suivants sont des boréliens : tout ouvert, tout fermés, tout singleton, tout intervalle, toute partie dénombrable.

Exercice 16. Montrer que la tribu borélienne est engendrée par les intervalles ouverts $]a, b[$, par les les intervalles de la forme $]a, +\infty[$ avec a rationnel.

Exercice 17. Soit $(A_n)_n$ une suite de parties d'un espace mesuré (Ω, μ). On suppose que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mu(A_n) < +\infty.$$

Montrer que

$$\mu(\limsup A_n) = 0.$$