

## Feuille 4

**Exercice 1.** 1. Montrer que  $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \otimes \mathcal{P}(\mathbb{N}) = \mathcal{P}(\mathbb{N}^2)$ .

2. Si  $\mu$  est la mesure de comptage sur  $\mathbb{N}$  montrer que  $\mu \otimes \mu$  est la mesure de comptage sur  $\mathbb{N}^2$ .

3. On considère une suite à deux indices  $(u_{i,j})$ . Montrer que si les nombres  $u_{i,j}$  sont positifs ou nuls alors

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \left( \sum_{j=0}^{+\infty} u_{i,j} \right) = \sum_{j=0}^{+\infty} \left( \sum_{i=0}^{+\infty} u_{i,j} \right).$$

4. Trouver un exemple de suite  $(u_{i,j})$  telle que

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \left( \sum_{j=0}^{+\infty} u_{i,j} \right) \neq \sum_{j=0}^{+\infty} \left( \sum_{i=0}^{+\infty} u_{i,j} \right).$$

**Exercice 2.** Trouver une fonction  $f$  borélienne de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  telle que

$$\int_0^{+\infty} \left( \int_0^{+\infty} f(x,y) dx \right) dy \neq \int_0^{+\infty} \left( \int_0^{+\infty} f(x,y) dy \right) dx,$$

alors que ces deux quantités sont définies et finies.

**Exercice 3.** Soit  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction borélienne et  $\Gamma = \{(x, f(x)) / x \in \mathbb{R}^d\}$  son graphe.

1. Montrer que  $\Gamma$  est une partie borélienne de  $\mathbb{R}^{d+1}$ .

2. Montrer que  $\Gamma$  est de mesure nulle pour la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^{d+1}$ .

**Exercice 4.** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  une fonction borélienne. Posons

$$A(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 < y < f(x)\}.$$

1. L'ensemble  $A(f)$  est-il une partie borélienne de  $\mathbb{R}^2$  ?

2. Que vaut la mesure de Lebesgue (dans  $\mathbb{R}^2$ ) de  $A(f)$  ?

**Exercice 5.** Soient  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré et  $f$  un application mesurable de  $X$  dans  $\mathbb{N}$ . Montrer que l'on a

$$\int_X f d\mu = \sum_{i=0}^{+\infty} i\mu(f^{-1}(\{i\})) = \sum_{i=0}^{+\infty} \mu(f^{-1}([i, +\infty[)).$$

**Exercice 6.** Calculer l'intégrale

$$\int_{[0,1]^2} [x+y] dx dy.$$

**Exercice 7.** Étudier l'intégrabilité sur  $]0, 1[$  et  $]0, 1[$  respectivement des fonctions données par

$$(x, y) \mapsto \frac{1}{(x^2 + y^2)^\alpha}, \quad (x, y, z) \mapsto \frac{1}{x + y^2 + z^3} \quad \text{et} \quad (x, y, z) \mapsto \frac{1}{1 - xyz}.$$

**Exercice 8.** 1. Calculer

$$\int \int_D \frac{dx dy}{(1+y)(1+x^2y)},$$

où  $D = \{(x, y) / x \geq 0, y \geq 0\}$ .

2. En déduire

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2 - 1} dx = \frac{\pi^2}{4}.$$

3. Calculer

$$\int \int \int_D \frac{dx dy dt}{(1+x^2t^2)(1+y^2t^2)},$$

où  $D = \{(x, y, t) / x \in [0, 1], y \in [0, 1], t \geq 0\}$ .

2. En déduire

$$\int_0^{+\infty} \left( \frac{\arctan t}{t} \right)^2 dt = \pi \ln 2.$$

**Exercice 9.** 1. Calculer l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dx dy.$$

2. En déduire la valeur de

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

**Exercice 10.** La boule euclidienne de rayon  $R > 0$  en dimension  $d \in \mathbb{N}^*$  est définie par

$$B_d(0, R) = \{x \in \mathbb{R}^d / x_1^2 + \dots + x_d^2 \leq R^2\}.$$

1. Calculer le volume (c'est-à-dire la mesure pour la mesure de Lebesgue  $\lambda_d$  sur  $\mathbb{R}^d$ ) de  $B_d(0, R)$  pour  $d = 1, 2, 3$ .

2. Montrer que  $\lambda_d(B_d(0, R)) = R^d \lambda_d(B_d(0, 1))$ .

3. Montrer que

$$\lambda_d(B_d(0, 1)) = 2I_d \lambda_{d-1}(B_{d-1}(0, 1)),$$

où  $I_d = \int_0^1 (1-y^2)^{\frac{d-1}{2}} dy$ .

4. Montrer que

$$I_d = \int_0^{\pi/2} \sin^d(\theta) d\theta.$$

5. Montrer que

$$I_{d+2} = \frac{d+1}{d+2} I_d.$$

6. Montrer que  $I_d I_{d+1} = \frac{\pi}{2(d+1)}$ .

7. En déduire

$$\lambda_{2d+1}(B_{2d+1}(0, R)) = \frac{2^{2d+1} d! \pi^d}{(2d+1)!} R^{2d+1}, \quad \lambda_{2d}(B_{2d}(0, R)) = \frac{\pi^d}{d!} R^{2d}.$$

8. Comparer  $\lambda_d(B_d(0, R))$  et  $\lambda_d(B_d(0, R(1-\epsilon)))$ . Que se passe-t-il lorsque  $d$  tend vers l'infini ?

**Exercice 11.** On considère l'application  $\phi$  de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^3$  définie par

$$\phi(x, y, z) = (x, xy \cos(z), y \sin(z)).$$

1. Montrer que  $\phi$  est un  $C^1$ -difféomorphisme de  $\Delta = ]0, 1[ \times ]-\pi, \pi[$  sur son image  $\phi(\Delta)$ .

2. Calculer  $\lambda_3(\phi(\Delta))$ .