

Feuille 3

Exercice 1. Soient f une fonction continue de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , $a < b$ deux réels.

1. Rappeler la définition de l'intégrale de Riemann

$$\int_a^b f(t) dt.$$

2. Montrer que $f\mathbf{1}_{[a,b]}$ est intégrable pour la mesure de Lebesgue (notée λ) sur \mathbb{R} et que

$$\int_{\mathbb{R}} f\mathbf{1}_{[a,b]} d\lambda = \int_a^b f(t) dt.$$

Exercice 2. Soit f une fonction continue de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Montrer que la fonction f est intégrable pour la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} si et seulement l'intégrale de Riemann généralisée

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$$

converge absolument et qu'on a alors

$$\int_{\mathbb{R}} f d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt.$$

Exercice 3. Pour tout nombre entier naturel n on pose

$$f_n(x) = 0 \text{ si } x \notin [0, n], \quad \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} \text{ pour } x \in [0, n].$$

1. Justifier que f_n est mesurable.
2. Calculer $\lim_n f_n$.
3. Calculer $\lim_n \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} dx$.

Exercice 4. 1. Montrer que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{e^x - 1} dx$$

est convergente.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \geq 0$ on pose $f_n(x) = x^2 \sum_{k=1}^n e^{-kx}$. Calculer la limite de $f_n(x)$ quand n tend vers l'infini.
3. Montrer que

$$\lim_n \int_0^{+\infty} f_n(x) dx = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{e^x - 1} dx.$$

4. Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{e^x - 1} dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{k^3}.$$

Exercice 5. 1. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer

$$I_n = \int_0^1 x^n \ln x dx$$

2. En déduire

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x} dx \text{ et } \int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2} dx.$$

Exercice 6. Montrer l'égalité

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{e^x - 1} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + 1}.$$

Exercice 7. 1. Soient α et β deux nombres réels strictement positifs. Montrer que

$$\int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x^\beta} = \sum_0^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha + \beta n}.$$

2. En déduire que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+n} = \ln 2 \text{ et } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 8. Déterminer les limites des suites (u_n) pour

1. $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{k^2 + nk + 1}$,
2. $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{\sin k}{k^2} \left(\frac{k}{k+1}\right)^n$,
3. $u_n = \int_0^1 \frac{1+nx^3}{(1+x^2)^n} dx$,
4. $u_n = \int_0^1 \frac{\sin \pi x}{1+x^n} dx$,
5. $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} \frac{x^{1/n}}{1+x^{1/n}} dx$,
6. $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(nx^n)}{nx^{n+1/2}} dx$,
7. $u_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n+k}{nk^{3/2} + k^3}$,
8. $u_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ne^{x^2} + \pi}{ne^{2x^2} + 4x^4} dx$.

Exercice 9. On considère la fonction

$$F(t) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+x^2} dx.$$

1. Pour quelles valeurs de t $F(t)$ est-elle bien définie ?
2. Montrer que F est continue sur \mathbb{R}_+ .
3. Montrer que F est dérivable deux fois sur \mathbb{R}_+^* et qu'elle est solution de l'équation différentielle

$$y''(t) + y(t) = \frac{1}{t}.$$