Feuille 2

Exercice 1. Soit $(A_n)_n$ une suite de parties d'un espace mesuré (Ω, μ). On suppose que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mu(A_n) < +\infty.$$

Montrer que

$$\mu(\limsup A_n) = 0.$$

Exercice 2. Soit f une application affine de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ donnée par la formule $f(x) = \alpha x + \beta$ où α et β sont deux nombres réels avec $\alpha \neq 0$. Montrer que A est un borélien si et seulement si $f(A)$ est un borélien.

Exercice 3. Soit μ l'application qui à une partie A de $\mathbb{R}$ associe le cardinal (éventuellement infini) de $A \cap \mathbb{Q}$. Montrer que μ définit une mesure sur la tribu $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. Montrer que cette mesure est σ-finie.

Exercice 4. Soient X, Y deux ensembles, f une application de X dans Y, (A_i) une famille de parties de X, (B_i) une famille de parties de Y. Comparer

1. $f(\cup_i A_i)$ et $\cup_i f(A_i)$,
2. $f(\cap_i A_i)$ et $\cap_i f(A_i)$,
3. $f^{-1}(\cup_i B_i)$ et $\cup_i f^{-1}(B_i)$,
4. $f^{-1}(\cap_i B_i)$ et $\cap_i f^{-1}(B_i)$,
5. $f({}^c A_i)$ et ${}^c f(A_i)$,
6. $f^{-1}({}^c B_i)$ et ${}^c f^{-1}(B_i)$.

Exercice 5. Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable. Soit μ une application définie sur $\mathcal{A}$ à valeurs dans $[0, +\infty]$ telle que :

+ $\mu(\emptyset) = 0$,
+ si A et B sont deux éléments disjoints de $\mathcal{A}$, alors $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$,
+ si $(A_n)_n$ est une suite croissante d'éléments de $\mathcal{A}$, alors $\mu(\cup_{n\geq 0} A_n) = \lim_n \mu(A_n)$.

Montrer que μ est une mesure sur $\mathcal{A}$.

Exercice 6. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1/x$ si $x \neq 0$, $f(0) = 0$ est borélienne.

Exercice 7. Montrer qu'une fonction monotone de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est borélienne.

Exercice 8. Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable. Montrer que $A \subset X$ est mesurable si et seulement si $\mathbf{1}_A$ est mesurable.

Exercice 9. Soient f et g deux fonctions mesurables définies d'un espace mesurable $(X, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Montrer que les ensembles $\{f < g\}$, $\{f \geq g\}$, $\{f = g\}$ sont $\mathcal{A}$-mesurables.

Exercice 10. Soient f et g deux fonctions mesurables définies d'un espace mesurable $(X, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. On dit que f et g sont égales μ-presque partout si

$$\mu(\{x \;/\; f(x) \neq g(x)\}) = 0.$$

1. Montrer que si $f_1 = g_1$ μ-presque partout et $f_1 = g_1$ μ-presque partout, alors $f_1 + f_2 = g_1 + g_2$ μ-presque partout.
2. Généraliser à n couples de fonctions égales p.p., puis à un nombre dénombrable de tels couples.

Exercice 11. *(théorème d'Egoroff)* Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(X) < +\infty$ et soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de $(X, \mathcal{A})$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que l'ensemble de convergence C de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est mesurable.
2. On suppose que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge μ-p.p. vers une fonction mesurable f, au sens où $\mu(X \setminus C) = 0$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, soit
$$E_n^k = \bigcap_{i\geq n} \left\{|f_i - f| \leq \frac{1}{k}\right\}.$$
Montrer que C est inclus dans la réunion $\cup_n E_n^k$. En déduire que, pour tout réel $\epsilon > 0$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $n_{k,\epsilon} \in \mathbb{N}^*$ $\mu(X \setminus E_{n_{k,\epsilon}}^k) < \frac{\epsilon}{2^k}$.
3. (théorème d'Egoroff) En déduire que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $E_\epsilon \in \mathcal{A}$ tel que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur E_ϵ et tel que $\mu(X \setminus E_\epsilon) < \epsilon$.
4. Donner un contre-exemple lorsque $\mu(X) = +\infty$.

Exercice 12. Supposons que la mesure de Lebesgue puisse être prolongée à $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$. Nous allons en déduire une absurdité. Définissons sur $\mathbb{R}$ la relation binaire suivante :
$$x \sim y \text{ si } x - y \in \mathbb{Q}.$$

1. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence.
2. En utilisant l'axiome du choix, construire un ensemble $A \subset [0, 1]$ qui contient un point exactement dans chaque classe d'équivalence de $\sim$.
Axiome du choix : Pour tout ensemble E non vide, il existe une application $\phi : \mathcal{P}(E) \to E$, telle que, pour toute partie $A \subset E$ non vide, $\phi(A) \in A$.
3. Si r et q sont deux nombres rationnels différents, déterminer $(A + r) \cap (A + q)$.
4. Montrer que $[0, 1] \subset \cup_{r\in\mathbb{Q}\cap[-1,1]}(A + r) \subset [-1, 2]$ et conclure.

Exercice 13. Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et T une application mesurable de $(X, \mathcal{A})$ dans lui-même. On suppose que la mesure μ est finie et que T préserve la mesure μ c'est-à-dire que, pour tout $A \in \mathcal{A}$, on a
$$\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A).$$
On note les itérés de T en utilisant des exposants :
$$T^1(x) = T(x) \quad T^2(x) = T(T(x)) \quad T^3(x) = T(T(T(x))) \quad \text{etc...}$$
Soit B un élément de $\mathcal{A}$. On pose
$$B_0 = \{x \in B \ / \ \forall n > 0 \ T^n(x) \notin B\}$$
$$B_n = T^{-n}B_0 = \{x \in X \ / \ T^n(x) \in B_0\}$$
(autrement dit B_n est l'image réciproque de B_0 par T^n).

1. Montrer que les ensembles B_n sont mesurables.
2. Montrer que les ensembles B_n sont disjoints. Que vaut $\mu(\cup_{n=1}^{\infty} B_n)$?
3. Que valent les nombres $\mu(B_n)$? En déduire que $\mu(B_0) = 0$.