Feuille 1

Exercice 1. Soient A, B, C trois ensembles.

1. On suppose que $A \cup B \subset A \cup C$ et $A \cap B \subset A \cap C$. Montrer que $B \subset C$.
2. On suppose que $A \cup B = A \cup C$ et $A \cap B = A \cap C$. Montrer que $B = C$.

Exercice 2. Soient A, B deux parties d'un ensemble X. Pour chacune des fonctions suivantes, définies sur X et à valeurs réelles, dire si elle est la fonction indicatrice d'une partie de X et si oui, de laquelle.

$$\mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B, \quad \mathbf{1}_A - \mathbf{1}_B, \quad \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B, \quad |\mathbf{1}_A - \mathbf{1}_B|, \quad \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B, \quad \max(\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B), \quad \min(\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B).$$

Exercice 3. Soit X un ensemble de cardinal n. Montrer que $\mathcal{P}(X)$ est de cardinal 2^n.

Exercice 4. Montrer qu'il n'existe pas de surjection d'un ensemble sur l'ensemble de ses parties. Raisonner par l'absurde : supposer que, pour un ensemble donné E, une telle surjection ϕ existe et considérer la partie de E constituée des éléments qui n'appartiennent pas à leur image par ϕ.

Exercice 5. *(paradoxe de Russel)* Montrer que l'ensemble de tous les ensembles n'existe pas.

Exercice 6. Montrer que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable, que $\mathbb{N}^p$ est dénombrable.

Exercice 7. Montrer que $[0, 1]$ n'est pas dénombrable.

Exercice 8. *(théorème de Cantor-Bernstein)* Soient A et B deux ensembles. On suppose qu'il existe une injection de A dans B et une injection de B dans A. Montrer qu'il existe une bijection de A sur B.

Exercice 9. Montrer que la limite supérieure d'une suite bornée est sa plus grande valeur d'adhérence, que sa limite inférieure est sa plus petite valeur d'adhérence.

Exercice 10. Soit $(A_n)_n$ une suite de parties d'un ensemble Ω. Montrer que

$$\limsup A_n = \cap_{n\in\mathbb{N}} \cup_{p\geq n} A_p$$

est l'ensemble des éléments de Ω qui appartiennent à une infinité de A_n. Montrer que

$$\liminf A_n = \cup_{n\in\mathbb{N}} \cap_{p\geq n} A_p$$

est l'ensemble des éléments de Ω qui appartiennent à tous les A_n à partir d'un certain rang. Montrer que $\liminf A_n \subset \limsup A_n$.

Exercice 11. Montrer que la série $\sum_n u_n$ converge et calculer sa somme pour :

$$u_n = \ln(1 - 1/n^2),\ n \geq 1 \qquad u_n = \frac{1}{n(n+1)} \qquad u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$
$$u_n = (n+1)^{1/(n+1)} - n^{1/n} \qquad u_n = \arctan\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right) \qquad u_n = \ln\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}$$

Exercice 12. Montrer que la série $\sum_n u_n$ diverge pour :

$$u_n = (-1)^n \qquad u_n = \sqrt{n}\ln\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1}.$$

Exercice 13. Soient $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ deux séries convergentes de termes généraux positifs. Montrer que la série de terme général $\sqrt{u_n v_n}$ est convergente ; plus généralement que la série de terme général w_n est convergente, où $w_n = u_n^{1/p} v_n^{1/q}$ avec p et q strictement plus grands que 1 tels que $1 = 1/p + 1/q$.

Exercice 14. Déterminer la nature des séries de terme général u_n lorsque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est l'une des suites suivantes. Lorsque u_n dépend d'un paramètre on discutera suivant les valeurs de ce paramètre.

$$\begin{array}{lll}
u_n = \dfrac{1}{n^{n+2}} & u_n = \left(\dfrac{2n-1}{n+1}\right)^{2n} & u_n = \dfrac{(-1)^n}{\tan n} \\
u_n = \dfrac{n!}{n^{n-p}} & u_n = \dfrac{n+\sqrt{n}}{n^3+1} & u_n = \left(1+(-1)^n/\sqrt{n}\right)^{1/2} - 1 \\
u_n = \dfrac{1}{n n^{1/n}} & u_n = n^2 e^{-\sqrt{n}} & u_n = (\ln(n)^2 + 2n^3) 2^{-5\ln(n)+2} \\
u_n = e - (1+1/n)^n & u_n = \dfrac{n^n}{(n+1)(n+2)\dots 2n} & u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} \\
u_n = \left(\dfrac{n+a}{n+b}\right)^{n^2} & u_n = \ln\left(1+\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}\right) & u_n = (-1)^n \sin\left(\dfrac{\sqrt{n+1}}{n}\right) \\
u_n = \dfrac{1+(-1)^n n^\alpha}{n^{2\alpha}} & u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^{2/3}+\cos n} & u_n = e^{(-1)^n\sqrt{n}} - 1
\end{array}$$

Exercice 15. Montrer que la série de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^x}$, pour x réel, converge si et seulement si $x > 1$. On définit ainsi une fonction

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}.$$

Montrer que ϕ est dérivable sur $]1, +\infty[$ et donner une expression de sa dérivée.

Exercice 16. Montrer que l'intégrale

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt$$

converge pour $x > 0$. Montrer que Γ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et donner une expression de sa dérivée.

Exercice 17. L'intersection de deux tribus est-elle une tribu ? Et la réunion ?

Exercice 18. Soit $(\mathcal{A}_n)$ une suite croissante d'algèbres. Montrer que la réunion des $\mathcal{A}_n$ est une algèbre. La réunion d'une suite croissante de tribus est-elle une tribu ?

Exercice 19. Montrer que les ensembles suivants sont des boréliens : tout ouvert, tout fermé, tout singleton, tout intervalle, toute partie dénombrable.

Exercice 20. Montrer que la tribu borélienne est engendrée par les intervalles ouverts $]a, b[$, par les intervalles de la forme $]a, +\infty[$ avec a rationnel.