

MARTINGALES ET GÉOMÉTRIE HYPERBOLIQUE

STÉPHANE LE BORGNE

à la mémoire de Mikhail Gordin.

1. INTRODUCTION

Comme son nom l'indique, le théorème limite central est un théorème important de la théorie des probabilités. Ses applications tant pratiques¹ que théoriques sont innombrables. D'abord établi pour les suites de variables indépendantes de même loi (théorème de De Moivre-Laplace), il a été démontré dans un grand nombre de situations (chaînes de Markov, processus stationnaires α - ou ϕ -mélangeants, martingales,...) qui affaiblissent de différentes façons la condition d'indépendance.

Le problème de la convergence vers une loi gaussienne des sommes ergodiques d'un système dynamique a été abordé dès les années quarante ([25]). Au début des années soixante en Russie de nombreux outils ont été créés permettant d'attaquer la question pour une classe plus large de systèmes dynamiques.

Depuis l'article de Sinai ([61]) paru en 1960, la preuve du théorème limite central (tlc) dans les systèmes dynamiques de type hyperbolique a fait l'objet de très nombreux travaux. Pour les systèmes d'Anosov, on se sert généralement du codage obtenu grâce à la construction de partitions markoviennes (*cf.* par exemple [29], [53]). Lorsque l'on sort de ce cadre (abandon de la compacité de l'espace ou de la régularité de la transformation, affaiblissement de la condition de régularité) différentes techniques peuvent être utilisées ([46], [64],...).

Soit (X, T, μ) un système dynamique probabilisé, ce qui signifie que $T : X \rightarrow X$ est une transformation mesurable d'un espace mesurable X qui préserve la mesure de probabilité μ . Si φ est une fonction mesurable de X vers \mathbb{R} , les fonctions $X_k = \varphi \circ T^k$ forment une suite de variables aléatoires sur l'espace probabilisé (X, μ) ; on s'attache alors à décrire le comportement asymptotique des sommes de Birkhoff

$$S_n = \sum_{j=0}^{n-1} X_j.$$

Le théorème ergodique affirme que, si le système dynamique est ergodique, les X_k satisfont la loi des grands nombres : dès que φ est intégrable, les moyennes $S_n(x)/n$ tendent μ -presque sûrement vers la constante $\int_X \varphi d\mu$. Supposons que φ a

1. Il convient sans doute de tempérer cette affirmation aujourd'hui, les outils de calcul automatisé étant un peu plus rapides qu'il y a soixante-dix ans.

une moyenne nulle et que son carré est intégrable. On dit que φ *satisfait le théorème limite central* s'il existe un réel *strictement positif* σ tel que

$$\mu\{x; \frac{1}{\sqrt{n}}S_n(x) \in A\} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_A \exp(\frac{-t^2}{2\sigma^2})dt$$

pour tout intervalle de nombres réels A . Nous allons nous intéresser aux processus stationnaires définis par l'action de transformations hyperboliques sur des fonctions régulières (en un sens qui sera précisé plus loin). Nous montrerons que le formalisme des martingales est bien adapté pour obtenir le tlc dans de telles situations.

La méthode des martingales, développée par Billingsley, Ibragimov puis Gordin ([26]) permet d'obtenir des résultats plus précis que le seul tlc, tel le principe d'invariance. Elle peut être appliquée à des situations où on ne dispose pas de partitions markoviennes (*cf.* par exemple les articles [40], [41], [64], [48], [49], [47]).

Nous montrons ici comment cette méthode fonctionne dans différents cas. Nous insisterons sur un petit nombre d'idées simples et tenterons de donner des démonstrations complètes... qui seront souvent basées sur des résultats fameux qui seront pour nous des outils. Nous ne chercherons pas à donner les énoncés les plus généraux, par exemple, nous ne nous intéresserons le plus souvent qu'à des fonctions bornées et éviterons les difficultés techniques qu'entraîne le fait de chercher à affaiblir les propriétés de régularité des fonctions considérées.

Nous commençons par démontrer quelques résultats sur les martingales et présenter la méthode de Gordin. Nous employons ensuite cette méthode dans deux cas d'école : le doublement de l'angle sur le cercle et la transformation dite du "chat d'Arnold". Après quoi nous passerons aux exemples venant de la géométrie hyperbolique (dont l'exemple du flot géodésique traité par Sinaï). Nous insisterons sur l'importance de l'équidistribution de certaines sous-variétés et expliquerons comment relier cette équidistribution au mélange. Nous donnerons une application des résultats établis à l'étude du comportement asymptotique du flot géodésique sur des variétés hyperboliques fibrées.

2. LE TLC POUR LES MARTINGALES ET LA MÉTHODE DE GORDIN

2.1. Le théorème de De Moivre-Laplace.

Définition 2.1. *Considérons une suite de variables aléatoires (X_n) et une variables aléatoire Y . On dit que X_n converge en loi vers Y si, pour toute fonction continue à support compact ϕ , on a*

$$\mathbb{E}(\phi(X_n)) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\phi(Y)).$$

Théorème 2.2. *Soient (X_n) une suite de variables aléatoires et Y une variables aléatoire. La suite X_n converge en loi vers Y si, pour tout t , on a*

$$\mathbb{E}(\exp(itX_n)) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\exp(itY)).$$

Théorème 2.3. Soit (X_k) une suite de variables indépendantes de même loi, d'espérance $\mathbb{E}(X_1)$ et de variance $\sigma^2 > 0$. La suite $\frac{1}{\sqrt{n}}(X_1 + X_2 + \dots + X_n - n\mathbb{E}(X_1))$ converge en loi vers une variable gaussienne centrée de variance σ^2 .

Démonstration. Nous ne considérons que le cas d'une suite de variables centrées.

$$\mathbb{E}(\exp(itS_n/\sqrt{n})) = \prod_{k=1}^n \mathbb{E}(\exp(itX_k/\sqrt{n})) = \mathbb{E}(\exp(itX_1/\sqrt{n}))^n.$$

Nous utilisons le développement de Taylor suivant : $\exp(itX_1/\sqrt{n}) = 1 + itX_1/\sqrt{n} - t^2 X_1^2/2n + O(1/n^{3/2})$, pour écrire

$$\mathbb{E}(\exp(itX_1/\sqrt{n})) = 1 + it \frac{\mathbb{E}(X_1)}{\sqrt{n}} - t^2 \frac{\mathbb{E}(X_1^2)}{2n} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) = 1 - \frac{\sigma^2 t^2}{2n} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

On obtient

$$\mathbb{E}(\exp(itX_1/\sqrt{n}))^n = \left(1 - \frac{\sigma^2 t^2}{2n} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \exp(-\sigma^2 t^2/2).$$

□

Nous allons maintenant assouplir la condition d'indépendance du précédent théorème. Commençons par donner une autre expression de l'exponentielle qui nous sera utile.

Lemme 2.4. Pour $|x| < 1$, l'égalité suivante définit une fonction ϕ :

$$\exp(ix) = (1 + ix) \exp\left(-\frac{x^2}{2} + \phi(x)\right),$$

et, pour $|x| < 1$, on a $|\phi(x)| < \frac{|x|^3}{2}$.

Démonstration. Nous utilisons la fonction Log définie sur le disque unité du plan complexe par :

$$\text{Log}(1 + z) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{z^{k+1}}{k+1},$$

pour $|z| < 1$. On a $\exp(\text{Log}(z)) = z$, pour $|z| < 1$. En majorant le reste d'une série alternée par le module du premier terme apparaissant dans ce reste, on obtient :

$$\left| \text{Log}(1 + ix) - ix - \frac{x^2}{2} \right| \leq \left| \frac{x^3}{3} + i \frac{x^4}{4} \right| \leq \frac{|x|^3}{2},$$

ce qui conduit à

$$\text{Log}\left(\frac{\exp(ix)}{1 + ix}\right) = ix - \text{Log}(1 + ix) = -x^2 + \phi(x)$$

avec $|\phi(x)| \leq \frac{|x|^3}{2}$. Il suffit alors de prendre l'image par exp pour obtenir la majoration souhaitée. □

Soit (X_k) une suite de variables aléatoires centrées. Nous voulons étudier l'espérance

$$\mathbb{E}(\exp(itS_n/\sqrt{n})).$$

Transformons cette expression en utilisant le lemme :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\exp(itS_n/\sqrt{n})) &= \mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^n\left(1+i\frac{X_k}{\sqrt{n}}\right)\prod_{k=1}^n\exp\left(-\frac{X_k^2}{2n}+\phi\left(\frac{X_k}{\sqrt{n}}\right)\right)\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^n\left(1+i\frac{X_k}{\sqrt{n}}\right)\exp\left(\sum_{k=1}^n\left(-\frac{X_k^2}{2n}+\phi\left(\frac{X_k}{\sqrt{n}}\right)\right)\right)\right)\end{aligned}$$

Nous nous restreignons maintenant au cas où les variables X_k sont bornées et données par l'action d'une transformation sur une fonction définie sur un système dynamique : il existe (Ω, \mathbb{P}) un espace de probabilité, T une application définie sur Ω préservant \mathbb{P} et une fonction f sur Ω telle que $X_k = f \circ T^k$. On suppose en outre que le système (Ω, \mathbb{P}, T) est ergodique. Le théorème de Birkhoff assure alors que

$$\sum_{k=1}^n \frac{X_k^2}{2n}.$$

converge presque sûrement vers $\mathbb{E}(\frac{X_1^2}{2})$, et comme f est bornée

$$\left|\sum_{k=1}^n \phi\left(\frac{X_k}{\sqrt{n}}\right)\right| \leq \frac{\|f\|^3}{\sqrt{n}}.$$

Ainsi on peut scinder la quantité précédente de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\exp(itS_n/\sqrt{n})) &= \mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^n\left(1+i\frac{X_k}{\sqrt{n}}\right)e^{-\frac{\mathbb{E}(X_1^2)}{2}}\right) \\ &\quad + \mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^n\left(1+i\frac{X_k}{\sqrt{n}}\right)\left(e^{\sum_{k=1}^n\left(-\frac{X_k^2}{2n}+\phi\left(\frac{X_k}{\sqrt{n}}\right)\right)} - e^{-\frac{\mathbb{E}(X_1^2)}{2}}\right)\right).\end{aligned}$$

Comme les variables X_k sont bornées par $\|f\|_\infty$ le module de $\prod_{k=1}^n(1+i\frac{X_k}{\sqrt{n}})$ est inférieur à $\exp(\frac{\|f\|_\infty^2}{2})$. Le théorème de Lebesgue implique alors que

$$\mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^n\left(1+i\frac{X_k}{\sqrt{n}}\right)\left(e^{\sum_{k=1}^n\left(-\frac{X_k^2}{2n}+\phi\left(\frac{X_k}{\sqrt{n}}\right)\right)} - e^{-\frac{\mathbb{E}(X_1^2)}{2}}\right)\right)$$

tend vers 0.

Définition 2.5. *Une suite de variables aléatoires (X_k) est appelée suite de **différences de martingale** relativement à une filtration croissante (\mathcal{F}_n) si les conditions suivantes sont satisfaites :*

pour tout n , X_n est \mathcal{F}_n -mesurable,

pour tout n , $\mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_{n-1}) = 0$.

Définition 2.6. *Une suite de variables aléatoires (X_k) est appelée suite de **différences de martingale renversée** relativement à une filtration décroissante (\mathcal{F}_n) si les conditions suivantes sont satisfaites :*

pour tout n , X_n est \mathcal{F}_n -mesurable,

pour tout n , $\mathbb{E}(X_n|\mathcal{A}_{n+1}) = 0$.

Si la suite (X_k) est une suite de différences de martingales (directe ou renversée) alors les espérances

$$\mathbb{E}\left(\prod_j X_{k_j}\right)$$

sont nulles lorsque les k_j sont différents. En particulier, si la suite (X_k) est une suite de différences de martingales (directe ou renversée),

$$\mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^n \left(1 + i \frac{X_k}{\sqrt{n}}\right)\right) = 1.$$

Par conséquent si (X_k) suite (X_k) est une suite de différences de martingales stationnaire ergodique, on a

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}(\exp(itS_n/\sqrt{n})) \\ &= e^{-\frac{\mathbb{E}(X_1^2)}{2}} + \mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^n \left(1 + i \frac{X_k}{\sqrt{n}}\right) \left(e^{\sum_{k=1}^n \left(-\frac{X_k^2}{2n} + \phi\left(\frac{X_k}{\sqrt{n}}\right)\right)} - e^{-\frac{\mathbb{E}(X_1^2)}{2}}\right)\right) \\ & \rightarrow_{n \rightarrow \infty} e^{-\frac{\mathbb{E}(X_1^2)}{2}} \end{aligned}$$

Cela démontre le tlc pour de telles suites.

Nous avons donc le résultat suivant (énoncé dans la terminologie des systèmes dynamiques).

Théorème 2.7. *Soit (X, \mathcal{B}, μ, T) un système dynamique inversible, f une fonction mesurable bornée, \mathcal{A} une sous-tribu de \mathcal{B} telle que*

$$\mathcal{A} \subset T\mathcal{A},$$

f est \mathcal{A} -mesurable,

$$\mathbb{E}(f|T^{-1}\mathcal{A}) = 0,$$

$$\int f^2 d\mu = \sigma^2(f) > 0.$$

Alors la fonction f satisfait le tlc.

Démonstration. L'hypothèse assure que la suite $(T^k f)$ est une suite de martingale renversée relativement à la filtration décroissante $(T^{-k}\mathcal{A})$:

$$\mathbb{E}(T^k f | T^{-k-1}\mathcal{A}) = \mathbb{E}(f | T^{-1}\mathcal{A}) \circ T^k = 0.$$

□

Depuis les premiers travaux de Billingsley et Ibragimov il existe beaucoup de résultats de ce type sur les martingales (voir [30] par exemple; [12]). Il n'est pas nécessaires que les variables soient bornées. Le résultat est encore valable pour les variables L^2 .

2.2. La méthode de Gordin. Peut-on trouver des fonctions f et des filtrations \mathcal{A}_n telles que la suite $(T^n f)$ soit une suite de différences de martingale? La réponse est oui. Mais il faut insister sur un point : notre problème n'est pas de savoir si l'on peut trouver des fonctions satisfaisant le tlc ; la réponse est (presque) toujours oui (cf l'article de Burton et Denker [14], ou encore celui de Volny [62]). La question que nous nous posons est : les fonctions régulières satisfont-elles le tlc ? Et en général les

fonctions régulières ne définissent aucune suite de différences de martingale quel que soit la filtration considérée.

Il faut assouplir la condition de martingale. On peut le faire facilement grâce à une idée introduite par Gordin en 1969 ([26]) : beaucoup des propriétés stochastiques des sommes ergodiques associées à une fonction f sont encore valables pour les fonctions homologues à f . Cela permet d'étendre les applications du théorème précédent.

Définition 2.8. *On dit qu'une fonction f est **homologue** à une fonction engendrant une suite de différences de martingale (resp. martingale renversée) si f peut s'écrire $f = g + h - Th$, où h est une fonction mesurable et g engendre une suite de différences de martingale (resp. martingale renversée) sous l'action de T .*

Si f et g sont homologues, on a l'égalité

$$S_n f = S_n g + h - T^n h,$$

entre les sommes ergodiques, de sorte que, après normalisation, elles ont des comportements analogues.

Le caractère hilbertien de la notion de différences de martingale permet d'obtenir facilement des critères d'homologie à une fonction engendrant une suite de différences de martingale.

Par exemple on a le résultat suivant (cf [30] page 145) :

Théorème 2.9. *Soit (X, \mathcal{A}, μ, T) un système dynamique inversible ergodique, (\mathcal{A}_n) une filtration de \mathcal{A} telle que $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{A}_{n+1} = T^{-1}\mathcal{A}_n$ et f une fonction dans $L^2(\mu)$ telle que*

$$\sum_{n>0} \|E(f|\mathcal{A}_n)\|_2 < \infty \quad \text{et} \quad \sum_{n<0} \|f - E(f|\mathcal{A}_n)\|_2 < \infty.$$

Alors, soit il existe une fonction intégrable h telle que $f = h - Th$, soit la fonction f satisfait le tlc.

Il est facile de décrire comment on peut appliquer ce théorème pour démontrer les théorèmes limite dans les systèmes partiellement hyperboliques.

Supposons que X soit une variété différentiable et qu'en chaque point on puisse définir une variété locale dilatée par T . Supposons de plus qu'on puisse construire une filtration (\mathcal{A}_n) telle que, pour tout n , les atomes de \mathcal{A}_n soient des morceaux de feuilles dilatées. Alors les atomes de \mathcal{A}_n , images par T^{-n} des atomes de \mathcal{A}_0 , sont de très petite taille lorsque n tend vers $+\infty$ et s'enroulent rapidement dans X lorsque n tend vers $-\infty$. Considérons alors une fonction f régulière sur X . La valeur de l'espérance conditionnelle $E(f|\mathcal{A}_n)$ en un point x est la moyenne de f sur l'atome de \mathcal{A}_n contenant x . Pour n tendant vers l'infini $E(f|\mathcal{A}_n)(x)$ est donc très proche de $f(x)$ car f est régulière : la convergence de la deuxième série sera assez facile à établir (du moins dans les cas où la dilatation est uniforme). Pour n tendant vers moins l'infini $E(f|\mathcal{A}_n)(x)$ est l'intégrale de f sur un grand morceau de feuille dilatée passant par x : pour démontrer la convergence de la première série, il faut disposer

d'un résultat d'équidistribution des variété instable de T dans X . Ce deuxième point est le plus délicat. Pour le traiter, on peut relier équirépartition des variétés instables et vitesse de décorélation pour les fonctions régulières.

2.3. Exemple 1 : le doublement d'angle. Soit (X, T, μ) défini de la façon suivante : $X = [0, 1]$,

$$T : x \mapsto 2x \bmod 1,$$

μ la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$. Soit f une fonction lipschitzienne définie sur le tore \mathbb{T}^1 . Nous nous intéressons au processus $(f \circ T^k)_k$. Si f et g sont deux fonctions mesurables bornées sur X , on a

$$\int_X f \circ T.g \, d\mu = \int_X f.Pg \, d\mu,$$

où l'opérateur P est donné par

$$Pf(x) = \frac{1}{2}\left(f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right)\right).$$

Les itérés de cet opérateur sont

$$P^n f(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} f\left(\frac{x+k}{2^n}\right).$$

Pour une fonction lipschitzienne f de constante de Lipschitz L_f on a

$$\|P^n f - \int_0^1 f \, d\mu\|_\infty \leq \frac{L_f}{2^n}.$$

Si de plus la fonction f est centrée la somme $\sum_{k \geq 0} P^k f$ est convergente.

Par ailleurs

$$(TPf)(x) = (Pf)(2x) = \frac{1}{2}\left(f\left(\frac{2x}{2}\right) + f\left(\frac{2x+1}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(f(x) + f\left(x + \frac{1}{2}\right)\right),$$

et

$$(PTf)(x) = \frac{1}{2}\left(Tf\left(\frac{x}{2}\right) + Tf\left(\frac{x+1}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(f(x) + Tf(x+1)\right) = f(x).$$

Soit \mathcal{A}_0 la tribu borélienne de X , et $\mathcal{A}_n = T^{-n}\mathcal{A}_0$. Lorsque f est continue, $T^n f$ est \mathcal{A}_n -mesurable. Les atomes de \mathcal{A}_n sont les ensembles $\{x + \frac{k}{2^n} / k = 0, \dots, 2^n - 1\}$ et on a

$$TP(\cdot) = \mathbb{E}(\cdot | \mathcal{A}_1) \quad T^n P^n(\cdot) = \mathbb{E}(\cdot | \mathcal{A}_n).$$

Soit f une fonction lipschitzienne. On peut écrire :

$$\begin{aligned} f &= \sum_{k \geq 0} P^k f - \sum_{k \geq 1} P^k f \\ &= \sum_{k \geq 0} P^k f - T \left(\sum_{k \geq 1} P^k f \right) + T \left(\sum_{k \geq 1} P^k f \right) - \sum_{k \geq 1} P^k f. \end{aligned}$$

Notons g la fonction

$$g = \sum_{k \geq 0} P^k f - T \left(\sum_{k \geq 1} P^k f \right)$$

et h

$$h = - \sum_{k \geq 1} P^k f,$$

alors on a $f = g + h - Th$ et

$$Pg = P \left(\sum_{k \geq 0} P^k f \right) - PT \left(\sum_{k \geq 1} P^k f \right) = \sum_{k \geq 1} P^k f - \sum_{k \geq 1} P^k f = 0$$

'est-à-dire $\mathbb{E}(g|\mathcal{A}_1) = 0$. Cela signifie aussi que pour $k > n$, $\mathbb{E}(T^n g|\mathcal{A}_k) = \mathbb{E}(g|\mathcal{A}_{k-n}) \circ T^n = 0$. En d'autres termes g engendre une suite de différences de martingale renversée.

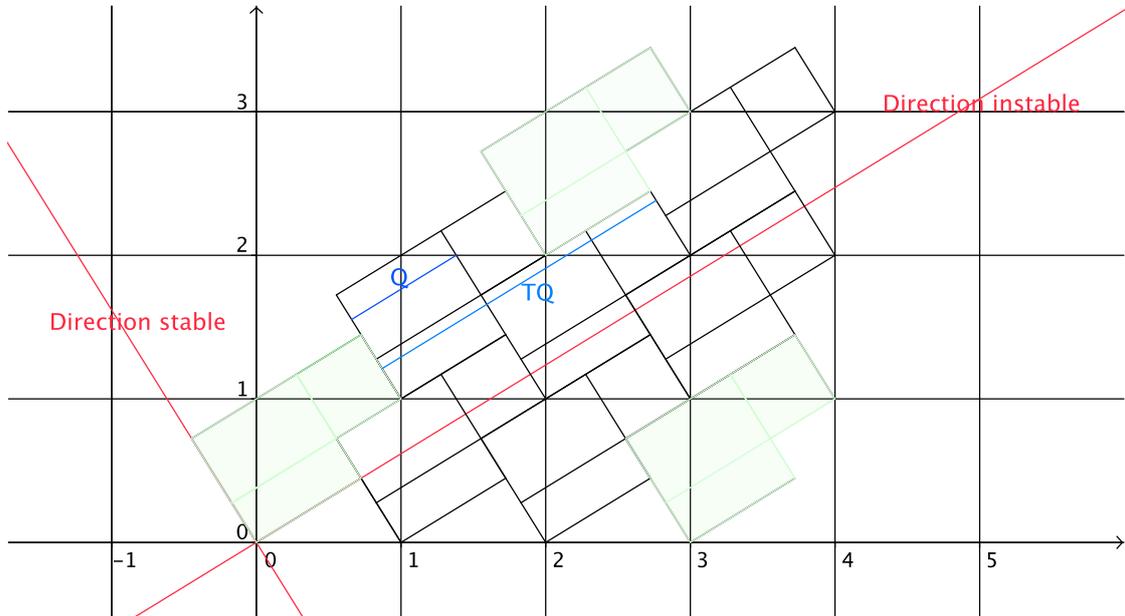
2.4. Exemple 2 : le chat d'Arnold. Soit A la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} T : \mathbb{T}^2 &\longrightarrow \mathbb{T}^2 \\ x &\longmapsto Ax. \end{aligned}$$

Cette transformation, et la mesure de Lebesgue (invariante par T) définit le système dynamique (\mathbb{T}^2, T, m) .

Description d'une filtration adéquate.



Supposons que nous ayons une filtration décroissante (\mathcal{A}_k) avec $\mathcal{A}_k = T^{-k}\mathcal{A}_0$ et considérons une fonction f . Une telle filtration est obtenue dans notre cas en considérant la tribu dont les atomes sont les sections stables des trois rectangles dessinées ci-dessus. Ces rectangles définissent une partition markovienne pour T : les images

des sections stables par T^{-1} de ces rectangles sont des réunions finie de telles sections, d'où les inclusions $\mathcal{A}_k = T^{-k}\mathcal{A}_0$.

Dans un premier temps nous manipulons des séries sans tenir compte de leur éventuelle convergence.

Définissons l'opérateur P par

$$P(f) = \mathbb{E}(f|\mathcal{A}_1) \circ T^{-1} = \mathbb{E}(T^{-1}f|\mathcal{A}_0).$$

Remarquons que

$$PT\mathbb{E}(f|\mathcal{A}_0) = P(\mathbb{E}(f|\mathcal{A}_0) \circ T) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(f|\mathcal{A}_0) \circ T \circ T^{-1}|\mathcal{A}_0) = \mathbb{E}(f|\mathcal{A}_0).$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(f|\mathcal{A}_0) &= \sum_{k \geq 0} \mathbb{E}(T^{-k}f|\mathcal{A}_0) - \sum_{k \geq 1} \mathbb{E}(T^{-k}f|\mathcal{A}_0) \\ &= \sum_{k \geq 0} \mathbb{E}(T^{-k}f|\mathcal{A}_0) - T \left(\sum_{k \geq 1} \mathbb{E}(T^{-k}f|\mathcal{A}_0) \right) \\ &\quad + T \left(\sum_{k \geq 1} \mathbb{E}(T^{-k}f|\mathcal{A}_0) \right) - \sum_{k \geq 1} \mathbb{E}(T^{-k}f|\mathcal{A}_0). \end{aligned}$$

Notons ϕ la fonction

$$\phi = \sum_{k \geq 0} \mathbb{E}(T^{-k}f|\mathcal{A}_0) - T \left(\sum_{k \geq 1} \mathbb{E}(T^{-k}f|\mathcal{A}_0) \right)$$

et ψ

$$\psi = - \sum_{k \geq 1} \mathbb{E}(T^{-k}f|\mathcal{A}_0).$$

Alors on a $\mathbb{E}(f|\mathcal{A}_0) = \phi + \psi - T\psi$ et $P\phi = 0$ car

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\mathbb{E}(T^{-k}f|\mathcal{A}_0) \circ T^{-1}|\mathcal{A}_0) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(f|\mathcal{A}_k) \circ T^{-k-1}|\mathcal{A}_0) \\ &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(f|\mathcal{A}_k)|\mathcal{A}_{k+1}) \circ T^{-k-1} \\ &= \mathbb{E}(f|\mathcal{A}_{k+1}) \circ T^{-k-1} \end{aligned}$$

de sorte que

$$\begin{aligned} P\phi &= \sum_{k \geq 0} \mathbb{E}(\mathbb{E}(T^{-k}f|\mathcal{A}_0) \circ T^{-1}|\mathcal{A}_0) - PT \left(\sum_{k \geq 1} \mathbb{E}(T^{-k}f|\mathcal{A}_0) \right) \\ &= \sum_{k \geq 0} \mathbb{E}(f|\mathcal{A}_{k+1}) \circ T^{-k-1} - \sum_{k \geq 1} \mathbb{E}(T^{-k}f|\mathcal{A}_0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Maintenant, nous allons procéder de manière semblable pour $f - \mathbb{E}(f|\mathcal{A}_0)$.

Considérons l'opérateur Q défini par

$$Qg = (g - \mathbb{E}(g|\mathcal{A}_{-1})) \circ T = g \circ T - \mathbb{E}(Tg|\mathcal{A}_0)$$

Si $g = f - \mathbb{E}(f|\mathcal{A}_0)$ on a

$$QT^{-1}g = g - \mathbb{E}(g|\mathcal{A}_0) = f - \mathbb{E}(f|\mathcal{A}_0) - \mathbb{E}(f|\mathcal{A}_0) + \mathbb{E}(f|\mathcal{A}_0) = g.$$

Étudions l'action des itérés de Q :

$$\begin{aligned} Q^2g &= Q(g \circ T - \mathbb{E}(Tg|\mathcal{A}_0)) \\ &= g \circ T^2 - \mathbb{E}(Tg|\mathcal{A}_0) \circ T - \mathbb{E}(g \circ T^2 - \mathbb{E}(Tg|\mathcal{A}_0) \circ T|\mathcal{A}_0) \\ &= g \circ T^2 - \mathbb{E}(T^2g|\mathcal{A}_1) - \mathbb{E}(T^2g|\mathcal{A}_0) + \mathbb{E}(\mathbb{E}(T^2g|\mathcal{A}_1)|\mathcal{A}_0) \\ &= g \circ T^2 - \mathbb{E}(T^2g|\mathcal{A}_1) - \mathbb{E}(T^2g|\mathcal{A}_0) + \mathbb{E}(T^2g|\mathcal{A}_1) \\ &= g \circ T^2 - \mathbb{E}(T^2g|\mathcal{A}_0) \\ &= g \circ T^2 - \mathbb{E}(g|\mathcal{A}_{-2}) \circ T^2 \end{aligned}$$

puis, de même :

$$Q^k g = g \circ T^k - \mathbb{E}(g|\mathcal{A}_{-k}) \circ T^k.$$

En appliquant ceci à la fonction $g = f - \mathbb{E}(f|\mathcal{A}_0)$ on obtient

$$\begin{aligned} Q^k(f - \mathbb{E}(f|\mathcal{A}_0)) &= T^k f - T^k \mathbb{E}(f|\mathcal{A}_0) - \mathbb{E}(f|\mathcal{A}_{-k}) \circ T^k + \mathbb{E}(\mathbb{E}(f|\mathcal{A}_0)|\mathcal{A}_{-k}) \circ T^k \\ &= T^k f - T^k \mathbb{E}(f|\mathcal{A}_0) - \mathbb{E}(f|\mathcal{A}_{-k}) \circ T^k + \mathbb{E}(f|\mathcal{A}_0) \circ T^k \\ &= T^k f - \mathbb{E}(f|\mathcal{A}_{-k}) \circ T^k. \end{aligned}$$

On peut ainsi écrire

$$\begin{aligned} f - \mathbb{E}(f|\mathcal{A}_0) &= \sum_{k \geq 0} Q^k(f - \mathbb{E}(f|\mathcal{A}_0)) - \sum_{k \geq 1} Q^k(f - \mathbb{E}(f|\mathcal{A}_0)) \\ &= \sum_{k \geq 0} Q^k(f - \mathbb{E}(f|\mathcal{A}_0)) - T^{-1} \left(\sum_{k \geq 1} Q^k(f - \mathbb{E}(f|\mathcal{A}_0)) \right) \\ &\quad + T^{-1} \left(\sum_{k \geq 1} Q^k(f - \mathbb{E}(f|\mathcal{A}_0)) \right) - \sum_{k \geq 1} Q^k(f - \mathbb{E}(f|\mathcal{A}_0)) \\ &= \sum_{k \geq 0} T^k f - \mathbb{E}(f|\mathcal{A}_{-k}) \circ T^k - T^{-1} \left(\sum_{k \geq 1} T^k f - \mathbb{E}(f|\mathcal{A}_{-k}) \circ T^k \right) \\ &\quad + T^{-1} \left(\sum_{k \geq 1} T^k f - \mathbb{E}(f|\mathcal{A}_{-k}) \circ T^k \right) - \sum_{k \geq 1} T^k f - \mathbb{E}(f|\mathcal{A}_{-k}) \circ T^k \end{aligned}$$

Notons ϕ la fonction

$$\phi_- = \sum_{k \geq 0} T^k f - \mathbb{E}(f|\mathcal{A}_{-k}) \circ T^k - T^{-1} \left(\sum_{k \geq 1} T^k f - \mathbb{E}(f|\mathcal{A}_{-k}) \circ T^k \right)$$

et ψ_-

$$\psi_- = - \sum_{k \geq 1} T^k f - \mathbb{E}(f|\mathcal{A}_{-k}) \circ T^k.$$

Alors $f - \mathbb{E}(f|\mathcal{A}_0) = \phi_- + \psi_- - T^{-1}\psi_-$ et $Q\phi_- = 0$ car

$$\begin{aligned} Q\phi_- &= Q \sum_{k \geq 0} T^k f - \mathbb{E}(f|\mathcal{A}_{-k}) \circ T^k - QT^{-1} \left(\sum_{k \geq 1} T^k f - \mathbb{E}(f|\mathcal{A}_{-k}) \circ T^k \right) \\ &= \sum_{k \geq 1} T^k f - \mathbb{E}(f|\mathcal{A}_{-k}) \circ T^k - \left(\sum_{k \geq 1} T^k f - \mathbb{E}(f|\mathcal{A}_{-k}) \circ T^k \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

comme nous avons vu que $QT^{-1} = Id$ en restriction à l'orthogonal de $L_2(\mathcal{A}_0)$. Cela signifie que ϕ_- appartient à $L_2(\mathcal{A}_{-1})$ et est orthogonal à $L_2(\mathcal{A}_0)$: autrement dit elle engendre une suite de différences de martingale.

Ainsi on a obtenu l'égalité

$$f = \phi + \phi_- + \psi - T\psi$$

où ϕ est dans $L_2(\mathcal{A}_0)$ orthogonale à $L_2(\mathcal{A}_1)$, ϕ_- est dans $L_2(\mathcal{A}_{-1})$ orthogonale à $L_2(\mathcal{A}_0)$. En modifiant un peu notre expression

$$f = \phi + T\phi_-T\phi_- + \phi_- + \psi - T\psi$$

nous obtenons

$$f = \varphi + \chi - T\chi$$

où φ est dans $L_2(\mathcal{A}_0)$ orthogonale à $L_2(\mathcal{A}_1)$. En d'autres termes f est homologue à une fonction φ engendrant une suite de sequence of différences de martingale **si les séries considérées convergent**. Si les séries

$$\sum_{n < 0} \|E(f|\mathcal{A}_n)\|_\infty < \infty \quad \text{et} \quad \sum_{n > 0} \|f - E(f|\mathcal{A}_n)\|_\infty < \infty.$$

convergent alors c'est le cas et de plus les fonctions φ et χ sont bornées.

Montrons que dans notre exemple ces séries convergent si f est un fonction C^∞ . Dans ce cas la série de Fourier de f converge normalement :

$$f = \sum_{p \in \mathbb{Z}^2} c_p e_p$$

où e_p désigne la fonction $e_p(\cdot) = \exp(2i\pi\langle p, \cdot \rangle)$ et c_p est le coefficient de Fourier

$$c_p = \int_{\mathbb{T}^2} f(x) \exp(-2i\pi\langle p, \cdot \rangle) dx.$$

Les atomes de \mathcal{A}_k sont les segments

$$\mathcal{A}_k(x) = \{x + tv / t \in [l_{k,x}, u_{k,x}]\}$$

où v est le vecteur $(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 1)$ (vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$). La valeur de $\mathbb{E}(f|\mathcal{A}_k)(x)$ est définie presque sûrement par

$$\mathbb{E}(f|\mathcal{A}_k)(x) = \frac{1}{(u_{k,x} - l_{k,x})} \int_{l_{k,x}}^{u_{k,x}} f(x + tv) dt.$$

L'entier k étant donné, ces segments peuvent avoir deux longueurs : les nombres $u_{k,x} - l_{k,x}$ appartiennent à $\{a\lambda^{-k}, b\lambda^{-k}\}$ (où a et b sont deux nombres à la description

des sections stables des rectangles de la partition de Markov). Si k est négatif, la différence entre $\mathbb{E}(f|\mathcal{A}_k)(x)$ et $f(x)$ est exponentiellement petite en $|k|$:

$$\begin{aligned}
|f(x) - \mathbb{E}(f|\mathcal{A}_k)(x)| &= \left| f(x) - \frac{1}{(u_{k,x} - l_{k,x})} \int_{l_{k,x}}^{u_{k,x}} f(x + tv) dt \right| \\
&= \frac{1}{(u_{k,x} - l_{k,x})} \left| \int_{l_{k,x}}^{u_{k,x}} (f(x) - f(x + tv)) dt \right| \\
&\leq \frac{1}{(u_{k,x} - l_{k,x})} \int_{l_{k,x}}^{u_{k,x}} |f(x) - f(x + tv)| dt \\
&\leq \frac{1}{(u_{k,x} - l_{k,x})} \int_{l_{k,x}}^{u_{k,x}} \|\nabla f\|_\infty \|v\| |t| dt \\
&\leq C \|\nabla f\|_\infty \lambda^{-k}.
\end{aligned}$$

Si k est positif,

$$\begin{aligned}
|\mathbb{E}(f|\mathcal{A}_k)(x)| &= \left| \frac{1}{(u_{k,x} - l_{k,x})} \int_{l_{k,x}}^{u_{k,x}} f(x + tv) dt \right| \\
&= \frac{1}{(u_{k,x} - l_{k,x})} \left| \int_{l_{k,x}}^{u_{k,x}} \sum_{p \in \mathbb{Z}^2} c_p \exp(2i\pi \langle x + tv, p \rangle) dt \right| \\
&= \left| \sum_{p \in \mathbb{Z}^2} c_p \exp(2i\pi \langle x, p \rangle) \frac{1}{(u_{k,x} - l_{k,x})} \int_{l_{k,x}}^{u_{k,x}} \exp(2i\pi \langle tv, p \rangle) dt \right| \\
&\leq \sum_{p \in \mathbb{Z}^2} \left| c_p \exp(2i\pi \langle x, p \rangle) \frac{1}{(u_{k,x} - l_{k,x})} \int_{l_{k,x}}^{u_{k,x}} \exp(2i\pi \langle tv, p \rangle) dt \right| \\
&\leq \sum_{p \in \mathbb{Z}^2} |c_p| \frac{1}{(u_{k,x} - l_{k,x})} \left| \int_{l_{k,x}}^{u_{k,x}} \exp(2i\pi \langle tv, p \rangle) dt \right| \\
&\leq \sum_{p \in \mathbb{Z}^2} |c_p| \frac{1}{(u_{k,x} - l_{k,x})} \left| \int_{l_{k,x}}^{u_{k,x}} \exp(2i\pi t \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} p_1 + p_2 \right)) dt \right| \\
&\leq \sum_{p \in \mathbb{Z}^2} |c_p| \frac{1}{(u_{k,x} - l_{k,x})} \frac{2}{|2i\pi \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} p_1 + p_2 \right)|} \\
&\leq C \lambda^k \sum_{p \in \mathbb{Z}^2} |c_p| \frac{1}{\left| \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} p_1 + p_2 \right) \right|}
\end{aligned}$$

Mais $\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ est quadratique, de sorte que $\left| \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} p_1 + p_2 \right) \right| \geq c |p_1|^{-1}$. On a donc

$$|\mathbb{E}(f|\mathcal{A}_k)(x)| \leq C \lambda^k \sum_{p \in \mathbb{Z}^2} |p_1 c_p|.$$

3. AUTRES THÉORÈMES LIMITE ET AUTRES EXEMPLES

3.1. Le principe d'invariance de Donsker. Nous nous intéressons maintenant à un autre théorème limite. Il s'agit encore d'une convergence en loi mais pour des probabilités définies sur un espace de fonctions continues : le principe d'invariance de Donsker affirme la convergence vers la mesure de Wiener de certains processus à valeurs dans $C^1[0, 1]$.

Théorème 3.1. *Il existe sur $C[0, 1]$ une unique mesure \mathbb{P} ayant les propriétés suivantes :*

pour toute t , la loi de la variable $W_t : f \mapsto f(t)$ est la loi gaussienne centrée de variance t ,

pour tous t, s avec $s < t$, les variables aléatoires $W_t - W_s$ et W_s sont indépendantes,

pour tous t, s avec $s < t$, la variable aléatoire $W_t - W_s$ a même loi que W_{t-s} .

La probabilité définie dans le théorème précédent est appelée mesure de Wiener.

Proposition 3.2. *Une probabilité sur $C^1[0, 1]$ est complètement déterminée par ses probabilités marginales de dimensions finies c'est-à-dire les lois des vecteurs $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_k})$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $(t_1, t_2, \dots, t_k) \in [0, 1]^k$.*

Billingsley explique bien dans [4] comment obtenir la convergence vers la mesure de Wiener (et il traite le cas des différences de martingale ; cas également traité dans le court article [12]). Pour montrer la convergence d'une suite de mesures vers la mesure de Wiener on peut procéder en deux étapes : d'abord établir les convergences des lois marginales de dimensions finies, ensuite la relative compacité de la suite considérée.

Une suite de probabilités (μ_n) vues comme des mesures de Radon sur un espace polonais X est dite tendue si pour tout $\epsilon > 0$ on peut trouver une partie compacte K de X telle que, pour tout n , on ait $\mu_n(K) > 1 - \epsilon$.

Le théorème d'Arzela-Ascoli caractérise les parties relativement compactes de $\mathcal{C}([0, 1])$: ce sont les ensembles $E \subset \mathcal{C}([0, 1])$ tels que, pour tout $x \in [0, 1]$, $\sup_{f \in E} |f(x)| < \infty$ et E équicontinu, c'est-à-dire

$$\forall \epsilon > 0 \exists \alpha > 0 \forall x, y (|x - y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon).$$

Soit (ξ_n) une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathcal{C}([0, 1])$. La suite des probabilités image sur $\mathcal{C}([0, 1])$ est tendue si (on écrit simplement que les probabilités d'une grande partie compacte de $\mathcal{C}([0, 1])$ sont uniformément proches de 1) : pour tout $x \in [0, 1]$,

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \sup_n \mathbb{P}(|\xi_n(x)| > M) = 0$$

et, pour tout $\epsilon > 0$,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \sup_n \mathbb{P}(\sup_{|x-y| < \alpha} |\xi_n(x) - \xi_n(y)| > \epsilon) = 0.$$

La relative compacité (ou tension) d'une suite définie par une martingale stationnaire ergodique est une conséquence de l'inégalité maximale suivante.

Théorème 3.3. (*Inégalité de Doob*) Soit $(\mathcal{F}_k)_{k \geq 0}$ une filtration définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et soit $(S_k)_{k \geq 0}$ une martingale relativement à $(\mathcal{F}_k)_{k \geq 0}$.

On a

$$\mathbb{P} \left(\sup_{0 \leq k \leq n} |S_k^4| \geq \alpha \right) \leq \frac{\mathbb{E}(S_n^4)}{\alpha}.$$

Démonstration. Soit A_j l'ensemble

$$A_j = \sup_{0 \leq k \leq j} S_k^4 < \alpha.$$

C'est une suite décroissante d'ensembles dont l'intersection A_n est le complémentaire de $B = \sup_{0 \leq k \leq n} S_k^4 \geq \alpha$. Considérons la somme

$$U = \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{1}_{A_j} (S_{j+1}^4 - S_j^4) + S_0^4.$$

Si $x \in B$ alors il existe j tel que $x \notin A_j$. La variable U est alors égale en x à $S_{j+1}^4(x)$ où j satisfait $\sup_{0 \leq k \leq j} S_k^4(x) < \alpha$, $\sup_{0 \leq k \leq j+1} S_k^4 \geq \alpha$, de sorte que $U(x) = S_{j+1}^4(x) \geq \alpha$; on a $\alpha \mathbf{1}_B \leq U$ d'où

$$\mathbb{P}(B) \leq \mathbb{E}(U)/\alpha,$$

et il reste à vérifier que $\mathbb{E}(U) \leq \mathbb{E}(S_n^4)$.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(U) &= \mathbb{E} \left(\sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{1}_{A_j} (S_{j+1}^4 - S_j^4) \right) \\ &= \mathbb{E} \left(\sum_{j=0}^{n-1} (S_{j+1}^4 - S_j^4) \right) - \mathbb{E} \left(\sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{1}_{cA_j} (S_{j+1}^4 - S_j^4) \right) \\ &= \mathbb{E}(S_n^4) - \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{E}(\mathbf{1}_{cA_j} (S_{j+1}^4 - S_j^4)) \\ &= \mathbb{E}(S_n^4) - \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{E}(\mathbf{1}_{cA_j} (\mathbb{E}(S_{j+1}^4 | \mathcal{F}_j) - S_j^4)) \end{aligned}$$

Mais l'inégalité de Jensen donne $\mathbb{E}(S_{j+1}^4 | \mathcal{F}_j) \geq \mathbb{E}(S_{j+1} | \mathcal{F}_j)^4 = S_j^4$ (car $t \mapsto t^4$ est convexe). D'où le résultat. \square

Soit (X_k) une suite de variables aléatoires. Définissons l'élément aléatoire de $C[0, 1]$ suivant :

$$\xi_n(t) = \frac{1}{\sigma \sqrt{n}} \left(S_k + n(t - \frac{k}{n}) X_{k+1} \right),$$

pour $t \in [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$, $k = 0, \dots, n-1$.

Théorème 3.4. Soit X_k une suite de différences de martingale (ou de martingale renversée). On a la convergence

$$\xi_n \rightarrow^{\mathcal{L}} W.$$

Démonstration. Commençons par la convergence des lois marginales de dimensions finies. Soit l un entier positif, t_1, \dots, t_l , l nombres dans $[0, 1]$. Nous voulons montrer que

$$(\xi_n(t_1), \dots, \xi_n(t_l)) \rightarrow^{\mathcal{L}} (W_{t_1}, \dots, W_{t_l}).$$

Ceci est équivalent à la convergence (par un changement de variables linéaire) suivante pour laquelle les calculs sont plus simples :

$$(\xi_n(t_1), \xi_n(t_2) - \xi_n(t_1), \dots, \xi_n(t_l) - \xi_n(t_{l-1})) \rightarrow^{\mathcal{L}} (W_{t_1}, W_{t_2} - W_{t_1}, \dots, W_{t_l} - W_{t_{l-1}}).$$

D'après le théorème de Levy, cette convergence est vraie si

$$\mathbb{E} \left(\exp \left(i \sum_{j=1}^l u_j (\xi_n(t_j) - \xi_n(t_{j-1})) \right) \right) \rightarrow \prod_{j=1}^l \exp(-u_j^2(t_j - t_{j-1})/2).$$

Nous nous plaçons ici encore dans le cas borné. On a alors

$$\left| \xi_n(t_j) - \xi_n(t_{j-1}) - \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=[\sqrt{nt_{j-1}}]}^{[\sqrt{nt_j}]} X_k \right| \leq \frac{C}{\sqrt{n}}.$$

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left(\exp \left(i \sum_{j=1}^l \frac{u_j}{\sqrt{n}} \sum_{k=[\sqrt{nt_{j-1}}]}^{[\sqrt{nt_j}]} X_k \right) \right) \\ &= \mathbb{E} \left(\prod_{j=1}^l \prod_{k=[\sqrt{nt_{j-1}}]}^{[\sqrt{nt_j}]} \exp \left(i \frac{u_j X_k}{\sqrt{n}} \right) \right) \\ &= \mathbb{E} \left(\prod_{j=1}^l \prod_{k=[\sqrt{nt_{j-1}}]}^{[\sqrt{nt_j}]} \left(1 + i \frac{u_j X_k}{\sqrt{n}} \right) \exp \left(-\frac{u_j^2 X_k^2}{n} + \phi \left(\frac{u_j X_k}{\sqrt{n}} \right) \right) \right) \\ &= \mathbb{E} \left(\prod_{j=1}^l \prod_{k=[\sqrt{nt_{j-1}}]}^{[\sqrt{nt_j}]} \left(1 + i \frac{u_j X_k}{\sqrt{n}} \right) \left(\prod_{j=1}^l \left(\exp \left(-\frac{u_j^2}{n} \sum_{k=[\sqrt{nt_{j-1}}]}^{[\sqrt{nt_j}]} X_k^2 + \phi \left(\frac{u_j X_k}{\sqrt{n}} \right) \right) \right) \right) \right) \end{aligned}$$

Le théorème de Birkhoff donne

$$-\frac{u_j^2}{n} \sum_{k=[\sqrt{nt_{j-1}}]}^{[\sqrt{nt_j}]} X_k^2 \rightarrow -u_j^2(t_j - t_{j-1})\mathbb{E}(X_1^2)/2 = -u_j^2(t_j - t_{j-1})/2.$$

Comme les X_k sont bornées et $\phi(t) \leq Ct^3$, le théorème de convergence dominée de Lebesgue entraîne que la différence entre

$$\mathbb{E} \left(\prod_{j=1}^l \prod_{k=[\sqrt{nt_{j-1}}]}^{[\sqrt{nt_j}]} \left(1 + i \frac{u_j X_k}{\sqrt{n}} \right) \left(\prod_{j=1}^l \left(\exp \left(-\frac{u_j^2}{n} \sum_{k=[\sqrt{nt_{j-1}}]}^{[\sqrt{nt_j}]} X_k^2 + \phi \left(\frac{u_j X_k}{\sqrt{n}} \right) \right) \right) \right) \right)$$

et

$$\mathbb{E} \left(\prod_{j=1}^l \prod_{k=[\sqrt{nt_{j-1}}]}^{[\sqrt{nt_j}]} \left(1 + i \frac{u_j X_k}{\sqrt{n}} \right) \right) \left(\prod_{j=1}^l \exp(-u_j^2(t_j - t_{j-1})/2) \right)$$

tend vers 0. Enfin la propriété de martingale entraîne

$$\mathbb{E} \left(\prod_{j=1}^l \prod_{k=[\sqrt{nt_{j-1}}]}^{[\sqrt{nt_j}]} \left(1 + i \frac{u_j X_k}{\sqrt{n}} \right) \right) = 1.$$

La convergence des lois marginales est démontrée.

Nous allons utiliser la majoration suivante : il existe $C > 0$, tel que

$$\mathbb{E}(S_n^4) \leq Cn^2.$$

C'est une conséquence facile de la propriété de martingale (développer la puissance quatrième de la somme S_n et prendre l'espérance ; seuls restent les n termes $\mathbb{E}(Y_i^4)$ et les $n(n-1)/2$ termes $\mathbb{E}(Y_i^2 Y_j^2)$). Pour n suffisamment grand on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|\xi_n(t)| > M) &\leq \mathbb{P}\left(\left\| \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{[nt]} Y_k \right\| \geq M-1\right) \\ &\leq \mathbb{P}\left(\left(\sum_{k=0}^{[nt]} Y_k\right)^4 \geq (M-1)^4 n^2\right) \leq \frac{\mathbb{E}(S_{[nt]}^4)}{(M-1)^4 n^2} \leq Ct^4 (M-1)^{-4}, \end{aligned}$$

de sorte que $\lim_{M \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|\xi_n(t)| > M) = 0$. Enfin il reste à montrer que, pour tout $\epsilon > 0$,

$$\limsup_{\alpha \rightarrow 0} \mathbb{P}\left(\sup_n \sup_{|x-y| < \alpha} |\xi_n(x) - \xi_n(y)| > \epsilon\right) = 0.$$

Fixons ϵ et α . Si $\sup_{|x-y| < \alpha} |\xi_n(x) - \xi_n(y)| > \epsilon$ alors il existe un entier $k \leq 1/\alpha$ tel que $\sup_{|x-k\alpha| < \alpha} |\xi_n(x) - \xi_n(k\alpha)| > \epsilon/2$. Comme

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\sup_{|x-k\alpha| < \alpha} |\xi_n(x) - \xi_n(k\alpha)| > \epsilon/2\right) &\leq \mathbb{P}\left(\sup_{0 \leq \ell \leq \alpha(n+1)} \left| \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=[n(k-1)\alpha]}^{[n(k-1)\alpha] + \ell} Y_j \right| \geq \epsilon/2\right) \\ &\quad + \mathbb{P}\left(\sup_{0 \leq \ell \leq \alpha(n+1)} \left| \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=[nk\alpha]}^{[nk\alpha] + \ell} Y_j \right| \geq \epsilon/2\right). \end{aligned}$$

l'inégalité de Doob implique que

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0 \leq \ell \leq \alpha(n+1)} \left| \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=[n(k-1)\alpha]}^{[n(k-1)\alpha] + \ell} Y_j \right| \geq \epsilon/2\right) \leq \frac{1}{n^2 \epsilon^4} \mathbb{E} \left(\left(\sum_{j=[n(k-1)\alpha]}^{[n(k-1)\alpha] + [\alpha(n+1)]} Y_j \right)^4 \right).$$

Par ailleurs on a

$$\mathbb{E} \left(\left(\sum_{j=[n(k-1)\alpha]}^{[n(k-1)\alpha] + [\alpha(n+1)]} Y_j \right)^4 \right) \leq C\alpha^2 (n+1)^2.$$

En rassemblant les inégalités précédentes on obtient

$$\mathbb{P}\left(\sup_{|x-y| < \alpha} |\xi_n(x) - \xi_n(y)| > \epsilon\right) \leq C\alpha^{-1} \frac{1}{n^2 \epsilon^4} \alpha^2 (n+1)^2 \leq C\alpha \epsilon^{-4}$$

qui tend vers 0 quand α .

□

Nous ne démontrerons ici que le tlc et le principe de Donsker. Mais des calculs analogues fournissent d'autres propriétés. Donnons quelques exemples.

Le tlc pour les fonctions à valeurs vectorielles. Considérons le cas où φ prend ses valeurs dans \mathbb{R}^2 (les cas de dimensions supérieures se traitent de manière analogue). On dit que $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ engendre une suite de différences de martingale si φ_1 et φ_2 le font. Alors pour tous t_1, t_2 , $t_1\varphi_1 + t_2\varphi_2$ engendre une suite de différences de martingale. Le tlc pour la suite normalisée associée donne :

$$\mathbb{E}(\exp(\frac{1}{\sqrt{n}}i \sum_{j=0}^{n-1} (t_1\varphi_1 + t_2\varphi_2) \circ T^j)) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} \exp(-\frac{\sigma^2(t_1, t_2)}{2}),$$

où

$$\sigma^2(t_1, t_2) = \mathbb{E}((t_1\varphi_1 + t_2\varphi_2)^2) = t_1^2\mathbb{E}(\varphi_1^2) + 2t_1t_2\mathbb{E}(\varphi_1\varphi_2) + t_2^2\mathbb{E}(\varphi_2^2).$$

Cela signifie exactement que nous avons le tlc pour la fonction φ : le processus $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi \circ T^j$ à valeurs dans \mathbb{R}^2 tend en loi vers la variable gaussienne de matrice de covariance

$$\begin{pmatrix} \mathbb{E}(\varphi_1^2) & \mathbb{E}(\varphi_1\varphi_2) \\ \mathbb{E}(\varphi_1\varphi_2) & \mathbb{E}(\varphi_2^2) \end{pmatrix}.$$

Cette loi limite est dégénérée si sa matrice de covariance a un déterminant nul. L'inégalité de Cauchy-Schwarz montre que ce n'est le cas que si φ_1 et φ_2 sont proportionnelles c'est-à-dire si φ prend ses valeurs dans une droite de \mathbb{R}^2 .

Lorsqu'on applique la méthode de Gordin à une fonction régulière à valeurs dans \mathbb{R}^2 alors on obtient que les sommes ergodiques normalisée convergent vers un vecteur gaussien non dégénéré si φ n'est pas cohomologue à une fonction prenant ses valeurs dans une droite de \mathbb{R}^2 .

Il existe aussi une version multidimensionnelle du principe de Donsker qui affirme la convergence en loi de la fonction définie à partir des sommes ergodiques par interpolation linéaire pour les fonctions à valeurs dans \mathbb{R}^d vers un mouvement brownien dans \mathbb{R}^d .

Le tlc pour les sous-suites. Nous voulons étudier le comportement des sommes ergodiques à des temps aléatoires ayant une densité positive commune dans \mathbb{N} .

Théorème 3.5. (*tlc pour les sous suites*) Soit (Y_k) une suite de différences de martingale définie sur un espace $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ et $n(\cdot)$ une suite aléatoire

$$n : \Omega \rightarrow \mathbb{N} \quad \omega \mapsto n(\omega)$$

telle qu'il existe $a \in]0, 1[$ pour lequel, pour \mathbb{P} -presque tout ω ,

$$\frac{\text{Card}\{n(\omega)/n(\omega) \leq k\}}{k} \rightarrow_{k \rightarrow \infty} a.$$

Alors

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n(\cdot)-1} Y_j(\cdot) \rightarrow_{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, a\mathbb{E}(Y_0^2)).$$

3.2. Construction de filtrations adéquates. Voici une manière de construire des filtrations que nous utiliserons pour tous nos exemples. On se donne une partition \mathcal{P} . Pour deux entiers $k \leq l$, appelons \mathcal{P}_k^l la partition définie par $T^{-k}\mathcal{P}, \dots, T^{-l}\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}_k^l(x)$ l'élément de \mathcal{P}_k^l contenant x .

Soient η et $\epsilon \in]0, 1[$ tels que, sur F_s , M^{-n} dilate les distances d'un coefficient supérieur à $\eta\epsilon^{-n}$ et soit β dans $]0, 1[$. Si nous montrons que la mesure de l'ensemble

$$V_n = \{x / \mathcal{P}_0^\infty(x) \text{ contient une boule in } x + F_s \text{ de rayon } \eta\beta^n\}$$

tend vers 1 quand n tend vers l'infini la proposition sera établie.

Considérons l'ensemble

$$W_n = \{y / d(T^j y, \partial\mathcal{P}(T^j y)) \geq \epsilon^j \beta^n, \forall j \geq 0\}.$$

Si $y \in W_n$, alors $\mathcal{P}(T^j y) \cap (T^j y + F_s)$ contient la boule $B_s(T^j y, \beta^n \epsilon^j)$. Ainsi l'ensemble $T^{-j}(\mathcal{P}(T^j y) \cap (T^j y + F_s))$ contient la boule $B_s(y, \beta^n \eta)$. Mais on a

$$\mathcal{P}_0^\infty(y) \supset \bigcap_{j \geq 0} T^{-j}(\mathcal{P}(T^j y) \cap (T^j y + F_s)).$$

Donc, si $y \in W_n$, $\mathcal{P}_0^\infty(y)$ contient la boule $B_s(y, \beta^n \eta)$. En d'autres termes V_n contient W_n . Par ailleurs, vue la forme des frontières des éléments de \mathcal{P} grâce à l'invariance par T de m , on montre qu'il existe $L > 0$ tel que

$$m\{y / d(T^j y, \partial\mathcal{P}(T^j y)) \leq \epsilon^j \beta^n\} \leq L\epsilon^j \beta^n.$$

On en déduit que la mesure de l'ensemble ${}^c W_n$ est inférieure à $\sum_{j \geq 0} L\epsilon^j \beta^n = L(1 - \epsilon)^{-1} \beta^n$ et ${}^c V_n$ a la même propriété.

3.3. Exemple 3 : le flot géodésique sur une surface compacte de courbure

-1. Le flot géodésique sur une surface compacte de courbure constante égale à -1 est algébriquement défini comme l'action sur le quotient de $G = PSL(2, \mathbb{R})$ par un réseau cocompact Γ du groupe à un paramètre :

$$\begin{aligned} g_t : G/\Gamma &\longrightarrow G/\Gamma \\ y &\longmapsto \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix} y. \end{aligned}$$

Les flots horicycliques sont définis par les groupes à un paramètre $(h_t^u)_{t \in \mathbb{R}}$ et $(h_t^s)_{t \in \mathbb{R}}$:

$$\begin{aligned} h_t^u &= \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ h_t^s &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Les orbites des groupes $(h_t^u)_{t \in \mathbb{R}}$ et $(h_t^s)_{t \in \mathbb{R}}$ fournissent respectivement les feuilles instables et stables du flot géodésique :

$$g_t h_a^u g_{-t} = h_{e^t a}^u, \quad g_t h_a^s g_{-t} = h_{e^{-t} a}^s, \quad \forall t, a \in \mathbb{R}.$$

Nous souhaitons étudier la convergence en loi d'intégrales de la forme

$$\int_0^T f(g_t \cdot) dt.$$

Un calcul simple montre que sous la condition

$$\int_0^\infty |\langle f(g_t \cdot), f \rangle| dt < \infty$$

la limite

$$\sigma(f) = \lim_T \frac{1}{T} \left\| \int_0^T f(g_t \cdot) dt \right\|_{L^2(m)}^2$$

existe. Il en résulte que la normalisation qui mènera à une convergence en loi (vers une loi non dégénérée) doit être de diviser $\int_0^T f(g_t \cdot) dt$ par \sqrt{T} .

Pour construire une filtration comme dit plus haut il est préférable de se placer dans le contexte du temps discret. On le fait facilement ici de la manière suivante. Soit f une fonction höldérienne sur G/Γ .

Soit T la translation à gauche par g_1 :

$$\begin{aligned} T : G/\Gamma &\longrightarrow G/\Gamma \\ y &\longmapsto \begin{pmatrix} e^{1/2} & 0 \\ 0 & e^{-1/2} \end{pmatrix} y. \end{aligned}$$

Le résultat suivant est dû à Burger.

Théorème 3.6. *Il existe $\alpha > 0$ et $C > 0$ tel que, pour toute fonction C^∞ f sur G/Γ , pour tout x et $t \geq 1$, on ait :*

$$\left| \frac{1}{t} \int_0^t f(h_r^s x) dr - \int_{G/\Gamma} f(y) dm(y) \right| \leq Ct^{-\alpha} \|f\|_{H_2^3}.$$

Soit $r > 0$ un nombre réel et z_0 un point de X tel que le "cube"

$$\mathcal{P}_0 = \{h_v^s g_t h_w^u z_0 / (v, t, w) \in [-r, r]^3\}$$

ne soit pas X tout entier (c'est le cas si r est assez petit). L'ensemble \mathcal{P}_0 définit une partition de X en deux ensembles : \mathcal{P}_0 et son complémentaire. Il sont tous les deux d'intérieur non vide. Tout orbite de $(h_t^s)_{t \in \mathbb{R}}$ intersecte \mathcal{P}_0 et ${}^c\mathcal{P}_0$. En particulier $(h_t^s)_{t \in \mathbb{R}}$ atteint la face

$$\mathcal{F}_0 = \{g_t h_w^u z_0 / (t, w) \in [-r, r]^2\}.$$

Pour tout x dans $X \setminus \mathcal{F}_0$, on peut trouver deux nombres $l_x < 0$ et $u_x > 0$ tels que :

$$h_{l_x}^s x \in \mathcal{F}_0, h_{u_x}^s x \in \mathcal{F}_0, \forall t \in (l_x, u_x), h_t^s x \notin \mathcal{F}_0.$$

Nous pouvons alors définir la partition \mathcal{Q} dont les atomes sont les ensembles

$$\mathcal{Q}(x) = \{h_t^s x / t \in (l_x, u_x)\}.$$

C'est une partition du complémentaire de l'ensemble négligeable \mathcal{F}_0 . On définit ensuite la partition \mathcal{Q}_0^∞ :

$$\mathcal{Q}_0^\infty(x) = \bigcap_{k \geq 0} T^{-k} \mathcal{Q}(T^k x).$$

Nous avons

$$T^{-1} \mathcal{Q}_0^\infty(x) = \bigcap_{k \geq 0} T^{-k-1} \mathcal{Q}(T^k x) = \bigcap_{k \geq 1} T^{-k} \mathcal{Q}(T^k T^{-1} x)$$

de sorte que

$$\mathcal{Q}_0^\infty(T^{-1}x) = \mathcal{Q}(T^{-1}x) \cap T^{-1}\mathcal{Q}_0^\infty(x).$$

Cela signifie que les atomes de \mathcal{Q}_0^∞ ont les propriétés suivantes :

- ce sont des morceaux d'orbites finis de $(h_t^s)_{t \in \mathbb{R}}$,
- l'image par T^{-1} d'un atome de \mathcal{Q}_0^∞ est une union d'atomes.

Notons \mathcal{A}_0 la tribu des ensembles boréliens saturés pour la relation d'équivalence définie par \mathcal{Q}_0^∞ . La seconde des propriétés précédentes assure que $T^{-1}\mathcal{A}_0$ est une sous-tribu de \mathcal{A}_0 . Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, soit \mathcal{A}_k la tribu $T^{-k}\mathcal{A}_0$: on obtient une filtration décroissante dont les atomes sont des morceaux finis d'orbites de $(h_t^s)_{t \in \mathbb{R}}$.

Nous voulons maintenant contrôler la "longueur" des atomes de \mathcal{A}_0 . Soit $\epsilon > 0$ un nombre réel. Quand le morceau $\{h_t^s x / t \in [-\epsilon, \epsilon]\}$ est-il inclus dans $\mathcal{Q}_0^\infty(x)$? Quand $\{h_t^s x / t \in [-\epsilon, \epsilon]\}$ est inclus dans $T^{-k}\mathcal{Q}(T^k x)$ pour tout $k \geq 0$, c'est-à-dire quand $T^k\{h_t^s x / t \in [-\epsilon, \epsilon]\} = \{h_{e^{-k}t}^s T^k x / t \in [-\epsilon, \epsilon]\}$ ne rencontre pas \mathcal{F}_0 . En d'autres termes $\{h_t^s x / t \in [-\epsilon, \epsilon]\}$ est inclus dans $\mathcal{Q}_0^\infty(x)$, si pour tout $k \geq 0$, $T^k x$ n'appartient pas à $\{h_t^s y / y \in \mathcal{F}_0, t \in [-e^{-k}\epsilon, e^{-k}\epsilon]\}$. Les mesures de ces ensembles sont bornées par $Ce^{-k}\epsilon$. Comme T préserve la mesure m , nous obtenons la proposition :

Proposition 3.7. *L'ensemble des points x pour lesquels $\{h_t^s x / t \in [-\epsilon, \epsilon]\}$ est inclus dans $\mathcal{Q}_0^\infty(x)$ est de mesure supérieure à $1 - C\epsilon$.*

Proposition 3.8. *L'espérance conditionnelle d'une fonction f relativement à \mathcal{A}_0 est presque sûrement donnée par*

$$\mathbb{E}(f|\mathcal{A}_0)(x) = \frac{1}{u_x^\infty - l_x^\infty} \int_{l_x^\infty}^{u_x^\infty} f(h_t^s x) dt,$$

où $\mathcal{Q}_0^\infty(x) = \{h_t^s x / t \in (l_x^\infty, u_x^\infty)\}$.

Nous sommes maintenant près à démontrer la convergence des séries

$$\sum_{n>0} \|E(f|\mathcal{A}_n)\|_2 < \infty \quad \text{et} \quad \sum_{n<0} \|f - E(f|\mathcal{A}_n)\|_2 < \infty.$$

pour une fonction C^∞ . La deuxième convergence est une conséquence facile du théorème des accroissements finis : la taille des atomes de \mathcal{A}_n est uniformément exponentiellement petite pour n tendant vers moins l'infini. Pour établir la convergence de la première série, nous procédons comme suit : soit $\beta < e$, l'ensemble V_n des points x pour lesquels $\{h_t^s x / t \in [-\beta^{-n}, \beta^{-n}]\}$ est inclus dans $\mathcal{Q}_0^\infty(x)$ est de mesure supérieure à $1 - C\beta^{-n}$. Si x appartient à $T^n V_n$, alors l'atome $\mathcal{A}_n(x)$ est un morceau de l'orbite de $(h_t^s)_{t \in \mathbb{R}}$ de longueur supérieure à $2e^n \beta^{-n}$; le résultat de Burger donne

$$|\mathbb{E}(f|\mathcal{A}_n)(x)| \leq C(2e^n \beta^{-n})^{-\alpha} \|f\|_{H_2^3}, \quad \text{for } x \in T^n V_n.$$

Nous avons donc

$$\|E(f|\mathcal{A}_n)\|_\infty \leq C(2e^n \beta^{-n})^{-\alpha} \|f\|_{H_2^3} + m({}^c T^n V_n) \|f\|_\infty,$$

et la convergence de la première série est assurée.

Le résultat est encore valable pour les fonctions höldériennes. pour le voir il suffit de régulariser de telles fonctions en utilisant la convolution.

Il est possible d'adapter cette technique au cas des surface non-compacte de volume fini. Mais des adaptations sont nécessaires : on sait qu'il existe dans ce cas de petites orbites périodiques autour des pointes qui ne rencontrent pas un "rectangle" compact (de dimension deux) dans G/Γ .

3.4. Exemple 4 : les automorphismes ergodiques des tores. Soient d un entier naturel et M une matrice de taille $d \times d$ à coefficients entiers de déterminant ± 1 **sans valeur propre racine de l'unité**. Cette matrice définit un automorphisme T du tore \mathbb{T}^d de dimension d :

$$T : \mathbb{T}^d \longrightarrow \mathbb{T}^d : x \longmapsto Mx \bmod 1.$$

Le triplet (\mathbb{T}^d, T, m) , où m désigne la mesure de Lebesgue sur \mathbb{T}^d , définit un système dynamique ergodique (on a même une propriété beaucoup plus forte : Katznelson ([K]) a montré que ce système est isomorphe à un système de Bernoulli).

Dans ce chapitre, nous utilisons la méthode des différences de martingale pour préciser le résultat de Leonov dans le cas des automorphismes quasi-hyperboliques du tore. Par "quasi-hyperbolique" il faut entendre que l'automorphisme supposé ergodique possède des valeurs propres de module 1. D'après un théorème de Kronecker un tel automorphisme a nécessairement des valeurs propres de module inférieur et supérieur à 1. Il a donc une "partie" hyperbolique.

Tout ce qui suit s'appliquerait au cas hyperbolique, mais pour des raisons pratiques, dans tout le chapitre, sauf indication contraire, nous considérons que T est ergodique quasi-hyperbolique. De tels automorphismes existent. La matrice suivante en fournit un exemple en dimension 4 :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Nous notons F_u (resp. F_s , resp. F_e) le sous-espace vectoriel M -stable associé aux valeurs propres de M de module supérieur (resp. inférieur, resp égal) à 1. Prenons v_1, \dots, v_d une base de \mathbb{R}^d dans laquelle M est représentée par une matrice de Jordan réelle. Nous désignerons par r la dimension de F_s et supposerons que v_1, \dots, v_r est une base de F_s . Dans \mathbb{R}^d nous considérons la norme infinie associée à la base v_1, \dots, v_d :

$$\|x\| = \max \left\{ |x_i| / x = \sum_1^d x_i v_i \right\}.$$

Nous désignerons par $B(x, \gamma)$ (resp. $B_i(x, \gamma)$) la boule de centre x et de rayon γ dans \mathbb{R}^d (resp. F_i) ($i = e, u$ ou s) et par m_s la mesure de Lebesgue sur F_s associée

à la base v_1, \dots, v_r . Nous noterons $d(\cdot, \cdot)$ (resp. $\delta(\cdot, \cdot)$) la distance induite par $\|\cdot\|$ sur \mathbb{R}^d (resp. sur \mathbb{T}^d). Posons

$$\rho = \frac{\min \{\|k\| / k \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}\}}{2\|M\|}.$$

Si x et x' sont deux éléments de \mathbb{R}^d tels que $\rho < d(x, x') \leq \|M\|\rho$, alors, modulo 1, x et x' appartiennent à deux éléments différents de toute partition du tore en ensembles de diamètres inférieurs à ρ (dans ce cas, on a en effet $d(x, x') = \delta(x, x')$).

3.4.1. Partition génératrice. Les résultats que nous montrons ci-dessous sont vrais pour une classe assez large de partitions. Néanmoins, la partition n'étant ici qu'un outil de démonstration, il est agréable pour la suite de fixer une partition de forme très particulière.

Considérons une partition \mathcal{P} du tore dont les éléments, de diamètres inférieurs à ρ , sont de la forme $\sum I_i v_i$, où les I_i sont des intervalles. On construit facilement une telle partition. Il suffit de recouvrir un domaine fondamental du tore par une famille finie d'ensembles de la forme voulue. Ensuite, à partir de l'ensemble des translatés de ces ensembles par les vecteurs à coordonnées entières, on construit une partition de \mathbb{R}^d invariante par translation entière, ce qui est équivalent à une partition du tore, en ensembles de la forme $\sum I_i v_i$.

Pour $k \leq l$ notons \mathcal{P}_k^l la partition engendrée par $T^{-k}\mathcal{P}, \dots, T^{-l}\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}_k^l(x)$ l'élément de \mathcal{P}_k^l contenant x . Pour tout couple (n, l) d'entiers les éléments de \mathcal{P}_n^l sont des convexes $P_s^{nl} + P_u^{nl} + P_e^{nl}$ (chaque P_i^{nl} est inclus dans une feuille $x + F_i$). Les matrices M et M^{-1} étant à coefficients entiers, pour tout k , les éléments de la partition $T^{-k}\mathcal{P}$ sont des pavés $P_s^k + P_u^k + P_e^k$. Les éléments de \mathcal{P}_n^l sont des intersections d'éléments des partitions $T^{-k}\mathcal{P}$ donc sont de la forme annoncée.

On peut montrer qu'on peut toujours trouver des points x du tore tels que $\mathcal{P}_{-\infty}^\infty(x) \neq \{x\}$ ([Li]). Cependant nous allons montrer en reprenant une démonstration de Lind ([Li]) que l'ensemble de ces points est de mesure de Lebesgue nulle. Montrons d'abord le résultat auxiliaire suivant.

Lemme 3.9. *Soit α irrationnel. Considérons T_α la rotation d'angle α sur le cercle \mathbb{T}^1 et le système dynamique $(\mathbb{T}^d \times \mathbb{T}^1, T \otimes T_\alpha, m \otimes l)$, où l désigne la mesure de Lebesgue sur \mathbb{T}^1 . Il existe $E_\alpha \subset \mathbb{T}^d$ de mesure 1 tel que pour tout x dans E_α et tout t dans \mathbb{T}^1 , (x, t) est d'orbite dense dans $(\mathbb{T}^d \times \mathbb{T}^1, T \otimes T_\alpha)$.*

Démonstration. Le système dynamique $(\mathbb{T}^d \times \mathbb{T}^1, T \otimes T_\alpha, m \otimes l)$ est ergodique car le système (\mathbb{T}^d, T, m) est faiblement mélangeant. Il existe donc $E_\alpha \subset \mathbb{T}^d$ de mesure 1 tel que, pour tout x dans E_α et pour presque tout t' dans \mathbb{T}^1 , (x, t') est d'orbite dense. Alors, pour tout ouvert $O \times I$ (I intervalle), tout x dans E_α et tout t dans \mathbb{T}^1 , il existe n tel que $(T^n x, T_\alpha^n t) \in O \times I$. En effet, considérons $I' \subset I$ de même milieu que I et de longueur $l(I)/3$. Si x appartient à E_α il existe en particulier t' tel que (x, t') soit d'orbite dense et tel que la distance de t à t' soit inférieure à

$l(I)/3$. Soit n tel que $(T^n x, T_\alpha^{n'}) \in O \times I'$, comme T_α est une isométrie on en déduit $(T^n x, T_\alpha^{n'}) \in O \times I$. \square

Proposition 3.10. *Pour presque tout x , on a $\mathcal{P}_0^\infty(x) \subset x + F_s$.*

Corollaire 3.11. *La partition \mathcal{P} est métriquement génératrice, c'est-à-dire que pour presque tout x , $\mathcal{P}_-\infty^\infty(x) = \{x\}$.*

Démonstration. Pour tout x , $\mathcal{P}_0^\infty(x) = \mathcal{P}(x) \cap \dots \cap T^{-n}\mathcal{P}(T^n x) \cap \dots$. Comme M_u^{-1} est contractante et que les éléments de \mathcal{P} sont de diamètres suffisamment petits, $\mathcal{P}_0^\infty(x) \subset x + F_s + F_e$ pour tout x . Pour montrer la proposition, il suffit alors de montrer que, pour presque tout x , tout $y \in B_e(0, \rho)$ non nul et tout $z \in B_u(0, \rho)$, il existe $P \in \mathcal{P}$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que

$$T^n x \in P, \quad T^n(x + y + z) \notin P.$$

Vu la forme des éléments de \mathcal{P} , pour $P \in \mathcal{P}$, si $T^n x \in P$ et $T^n(x + y) \notin P$ alors $T^n x \in P$ et $T^n(x + y + z) \notin P$. Il nous suffit donc de montrer que pour presque tout x , tout $y \in B_e(0, \rho)$ non nul, il existe $P \in \mathcal{P}$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que

$$T^n x \in P, \quad T^n(x + y) \notin P.$$

Considérons l'ensemble E de mesure 1 intersection des ensembles E_α lorsque α est tel que $\exp(2i\pi\alpha)$ soit valeur propre de M . Prenons x dans E , y non nul dans F_e et z dans F_s . Il existe j_0 tel que les coordonnées (y_{j_0}, y_{j_0+1}) de y suivant (v_{j_0}, v_{j_0+1}) soient non toutes deux nulles et tel que les coordonnées de $M^{n}y$ suivant (v_{j_0}, v_{j_0+1}) soient $(\cos n\theta_{j_0} y_{j_0} + \sin n\theta_{j_0} y_{j_0+1}, -\sin n\theta_{j_0} y_{j_0} + \cos n\theta_{j_0} y_{j_0+1})$. Soit P un élément de \mathcal{P} , $P = \sum_1^d |a_i, b_i| v_i$. Posons $P(\epsilon) = \sum_0^d a_i, a_i + \epsilon[v_i$. Comme x appartient à E et z appartient à F_s , si ϵ est choisi suffisamment petit, d'après le lemme précédent on peut trouver n tel que

$$T^n x \in P(\epsilon), \quad T^n(x + z) \in P(\epsilon), \quad \cos n\theta_{j_0} y_{j_0} + \sin n\theta_{j_0} y_{j_0+1} < -2\epsilon.$$

Si $\|M^n y\| < \rho$ alors on peut raisonner en coordonnées locales et ce qui précède montre que $T^n x \in P$ alors que $T^n(x + y) \notin P$. Si $\|M^n y\| > \rho$, il existe n' tel que $\rho < \|M^{n'} y\| \leq \|M\|\rho$ et $P' \in \mathcal{P}$ tel que $T^{n'} x \in P'$ alors que $T^{n'}(x + y) \notin P'$. \square

3.4.2. *Espérances conditionnelles.* Considérons les tribus \mathcal{A}_n engendrées par les partitions \mathcal{P}_n^∞ . Soit $f \in L^2(\mathbb{T}^d)$ de développement de Fourier $f(\cdot) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} c_k \exp(2i\pi \langle k, \cdot \rangle)$. Nous montrons que, s'il existe $K > 0$ et $\beta > 2$ tels que

$$\sum_{\|k\| > b} |c_k|^2 < K \log^{-\beta}(b)$$

alors les séries

$$\sum_{n > 0} \|E(f|\mathcal{A}_n)\|_2 \quad \text{et} \quad \sum_{n < 0} \|f - E(f|\mathcal{A}_n)\|_2$$

sont convergentes. Cela suffit, comme nous l'avons vu, à assurer l'existence d'une décomposition de Gordin pour f et prouve le TCL pour les sous-suites, le TCL fonctionnel et le principe d'invariance fort de Strassen.

La tribu \mathcal{A}_n est la tribu engendrée par la partition \mathcal{P}_n^∞ qui est mesurable au sens de Rokhlin ([R1]). Pour presque tout élément $\mathcal{P}_n^\infty(x)$ de \mathcal{P}_n^∞ , on peut définir une probabilité conditionnelle $m_{\mathcal{P}_n^\infty(x)}$ telle que, pour m -presque tout x , on ait

$$E(f|\mathcal{A}_n)(x) = \int_{\mathcal{P}_n^\infty(x)} f(t) dm_{\mathcal{P}_n^\infty(x)}(t) \quad \text{et} \quad m_{\mathcal{P}_n^\infty(x)}(\mathcal{P}_n^\infty(x)) = 1.$$

Proposition 3.12. *Soit x tel que $\mathcal{P}_0^\infty(x)$ soit un ensemble inclus dans $x + F_s$ d'intérieur non vide. Soit m_s la mesure de Lebesgue sur F_s associée à la base v_1, \dots, v_r . Alors*

$$m_{\mathcal{P}_n^\infty(x)} = \frac{m_s|_{\mathcal{P}_n^\infty(x)}}{m_s(\mathcal{P}_n^\infty(x))}.$$

Démonstration. Il suffit de vérifier cette égalité sur les ensembles ouverts de la forme $A = A_u + A_e + A_s$. Soit A un tel ensemble. D'après le théorème de convergence presque sûre des martingales de carré intégrable, pour presque tout x on a

$$m_{\mathcal{P}_n^\infty(x)}(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{m(\mathcal{P}_n^k(x) \cap A)}{m(\mathcal{P}_n^k(x))}.$$

Comme nous l'avons déjà vu l'ensemble $\mathcal{P}_n^k(x)$ est de la forme $P_s^{nk} + P_u^{nk} + P_e^{nk}$. Si $\mathcal{P}_n^\infty(x) \cap A$ est vide, alors

$$m_{\mathcal{P}_n^\infty(x)}(A) = 0 = \frac{m_s|_{\mathcal{P}_n^\infty(x)}(A)}{m_s(\mathcal{P}_n^\infty(x))}.$$

Si $\mathcal{P}_n^\infty(x) \cap A$ est non vide, alors, comme A est ouvert et que $P_u^{nk}(x)$ et $P_e^{nk}(x)$ se contractent en un point, pour k assez grand, $P_u^{nk} \subset A_u$ et $P_e^{nk} \subset A_e$. On en déduit

$$m_{\mathcal{P}_n^\infty(x)}(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{m_s(P_s^{nk} \cap A_s)}{m_s(P_s^{nk})},$$

ce qui permet de conclure. \square

Si x est tel que $\mathcal{P}_n^\infty(x)$ est un ensemble inclus dans $x + F_s$ d'intérieur non vide on a donc, en notant que $\mathcal{P}_n^\infty = T^{-n}\mathcal{P}_0^\infty$,

$$\begin{aligned} E(f|\mathcal{A}_n)(x) &= \int_{\mathcal{P}_n^\infty(x)} f(t) dm_{\mathcal{P}_n^\infty(x)}(t) \\ &= \frac{1}{m_s(\mathcal{P}_n^\infty(x))} \int_{\mathcal{P}_n^\infty(x)} f(t) dm_s(t) \\ &= \frac{1}{m_s(T^{-n}\mathcal{P}_0^\infty(T^n x))} \int_{T^{-n}\mathcal{P}_0^\infty(T^n x)} f(t) dm_s(t). \end{aligned}$$

Proposition 3.13. *Soit $f \in L^2(\mathbb{T}^d)$ de développement de Fourier*

$$f(\cdot) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} c_k \exp(2i\pi \langle k, \cdot \rangle).$$

S'il existe $K > 0$ et $\beta > 2$ tels que

$$\sum_{\|k\| > b} |c_k|^2 < K \log^{-\beta}(b)$$

alors la série

$$\sum_{n < 0} \|f - E(f|\mathcal{A}_n)\|_2$$

est convergente.

Démonstration. Pour une quantité $b(n)$ quelconque écrivons

$$f_{1n} = \sum_{\|k\| < b(n)} c_k \exp(2i\pi\langle k, \cdot \rangle) \text{ et } f_{2n} = \sum_{\|k\| < b(n)} c_k \exp(2i\pi\langle k, \cdot \rangle).$$

Les atomes de \mathcal{A}_n sont presque sûrement des morceaux de feuilles contractantes donc il existe des réels $K > 0$ et $\lambda \in]0, 1[$ tels que presque sûrement le diamètre de $\mathcal{P}_n^\infty(x)$ soit inférieur à $K\lambda^{-n}$ lorsque n est négatif. On en déduit qu'il existe $R_0 > 0$ tel que, les inégalités suivantes soient vérifiées

$$\begin{aligned} \|f_{1n} - E(f_{1n}|\mathcal{A}_n)\|_2 &\leq \|f_{1n} - E(f_{1n}|\mathcal{A}_n)\|_\infty \\ &\leq \sum_{\|k\| < b(n)} |c_k| \|\exp(2i\pi\langle k, \cdot \rangle) - \mathbb{E}(\exp(2i\pi\langle k, \cdot \rangle)|\mathcal{A}_n)\|_\infty \\ &\leq \sum_{\|k\| < b(n)} |c_k| \|k\| 2\pi K \lambda^{-n} \\ &\leq R_0 b(n)^{d+1} \lambda^{-n} \end{aligned}$$

D'autre part on a

$$\|f_{2n} - E(f_{2n}|\mathcal{A}_n)\|_2 \leq 2\|f_{2n}\|_2 \leq 2\log^{\beta/2}(b(n)).$$

Comme

$$\|f - E(f|\mathcal{A}_n)\|_2 \leq \|f_{1n} - E(f_{1n}|\mathcal{A}_n)\|_2 + \|f_{2n} - E(f_{2n}|\mathcal{A}_n)\|_2,$$

il suffit maintenant de prendre $b(n) = \lambda^{\frac{n}{2(d+1)}}$ pour voir que la série $\sum_{n < 0} \|f - E(f|\mathcal{A}_n)\|_2$ converge. \square

Nous allons maintenant montrer la convergence de la série $\sum_{n > 0} \|E(f|\mathcal{A}_n)\|_2$. La preuve repose sur les deux lemmes suivants. Le premier est dû à Katznelson.

Lemme 3.14. (*[K]*) Soit M une matrice carrée de taille $d \times d$ à coefficients entiers. Soit V et V_1 deux sous-espaces de \mathbb{R}^d M -stables tels que $\mathbb{R}^d = V \oplus V_1$ et tels que les restrictions de M à V et V_1 n'aient pas de valeurs propres communes. Si $V \cap \mathbb{Z}^d = 0$, il existe une constante $K > 0$ telle que pour tout $k \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$ on ait

$$d(k, V) \geq K\|k\|^{-q},$$

où q désigne la dimension de V .

Démonstration. Soit $P(X) = X^l + a_{l-1}X^{l-1} + \dots + a_0$ ($l \leq m$) le polynôme minimal de la restriction de M à V . C'est un polynôme à coefficients réels. Soient $\eta > 0$ et $Q(X) = X^l + b_{l-1}X^{l-1} + \dots + b_0$ un polynôme tel que $|a_i - b_i| < \eta$ pour tout $i = 0, \dots, l-1$. Lorsque η est petit, $P(M)Q(M)$ est proche de $P(M)^2$ dont la restriction à V_1 est injective puisque les restrictions de M à V et V_1 n'ont pas de

valeur propre commune. Pour η suffisamment petit le noyau de $Q(M)$ est donc inclus dans V et $Q(M)k$ est non nul pour tout vecteur entier non nul, k .

D'après le théorème de Dirichlet, pour tout entier positif N , il existe des entiers n, p_0, \dots, p_{l-1} , $n \leq N^l$, tels que $|a_j - p_j/n| \leq 1/nN$ pour tout $j = 0, \dots, l-1$. Notons Q_N le polynôme $Q_N(X) = X^l + p_{l-1}/n X^{l-1} + \dots + p_0/n$. Il existe N_0 tel que si $N > N_0$ alors $Q_N(M)$ ne s'annule pas sur les vecteurs entiers non nuls. Comme $nQ_N(M)$ est à coefficients entiers, pour N assez grand et tout vecteur entier non nul k , il existe une constante $h > 0$

$$\|Q_N(M)k\| \geq \frac{h}{n}.$$

Soient k un vecteur entier non nul et k_V sa projection orthogonale sur V . On a

$$Q_N(M)k = Q_N(M)(k - k_V) + (Q_N(M) - P(M))k_V.$$

Fixons $H > (\sum_0^{l-1} |a_j| + l)\|M^l\|$ ne dépendant pas de N tel que,

$$\frac{h}{n} \leq \|Q_N(M)k\| \leq H \left(d(k, V) + \frac{\|k\|}{nN} \right).$$

En choisissant $N = 2H\|k\|/h$, on obtient l'existence de $K > 0$ tel que

$$d(k, V) > \frac{h}{2nH} \geq \frac{h}{2HN^l} > K\|k\|^{-l}.$$

□

Un convexe compact C de F_s étant donné, nous appelons aire de la frontière de C , que nous notons $a(C)$, le volume $(r-1)$ -dimensionnel de cette frontière calculé dans la base v_1, \dots, v_r . Le convexe C peut être approché par une suite de polytopes convexes. Cette aire est la limite des aires des polytopes approximant C .

Lemme 3.15. *Soient C un convexe compact d'intérieur non vide inclus dans $x + F_s$ et γ un réel positif. On a l'inégalité suivante*

$$m_s\{y \in C / d(y, \partial C) \leq \gamma\} \leq \gamma a(C).$$

Démonstration. Un convexe compact C de $x + F_s$ étant donné, notons $C(\gamma)$ l'ensemble

$$C(\gamma) = \{y \in C / d(y, \partial C) > \gamma\}.$$

On a évidemment

$$m_s\{y \in C / d(y, \partial C) \leq \gamma\} = m_s(C) - m_s(C(\gamma)).$$

Donnons nous un réel positif ϵ . Alors pour tout polytope P convexe contenant C et contenu dans $C + B_s(\epsilon)$, on a

$$P(\gamma + \epsilon) \subset C(\gamma).$$

Si $P(\gamma + \epsilon)$ est vide alors l'inclusion est triviale. Sinon prenons $z \in P(\gamma + \epsilon)$. Quelque soit $y \in \partial C$, il existe $v \in \partial P$ tel que $d(y, v) \leq \epsilon$. On a

$$d(z, y) \geq d(z, v) - d(v, y) > \gamma + \epsilon - \epsilon = \gamma.$$

Le point y étant quelconque, ceci signifie que $d(y, \partial C)$ est supérieure à γ . L'inclusion est démontrée.

On a donc

$$m_s\{y \in C / d(y, \partial C) \leq \gamma\} \leq m_s(P \setminus P(\gamma + \epsilon)).$$

Comme pour un point y intérieur à P , la distance $d(y, \partial P)$ est égale à la distance de y à la projection orthogonale de y sur une face de P , l'ensemble $P \setminus P(\gamma + \epsilon)$ est inclus dans la réunion des prismes droits de hauteur $\gamma + \epsilon$ et de bases les faces de P . On a donc

$$m_s(P \setminus P(\gamma + \epsilon)) \leq (\gamma + \epsilon)a(P).$$

En faisant tendre P vers C et ϵ vers 0 on obtient

$$m_s\{y \in C / d(y, \partial C) \leq \gamma\} \leq \gamma a(C).$$

□

Lemme 3.16. *Il existe $K > 0$, $\lambda \in]0, 1[$ tels que, pour tout x , tout convexe compact C d'intérieur non vide inclus dans $x + F_s$ et tout $k \in \mathbb{Z}^d$, on ait*

$$\frac{1}{m_s(T^{-n}C)} \left| \int_{T^{-n}C} \exp(2i\pi \langle k, t \rangle) dm_s(t) \right| < K \frac{a(C)}{m_s(C)} \|k\|^{d-r} \lambda^n,$$

où $a(C)$ est l'aire de la frontière de C calculée dans la base v_1, \dots, v_r .

Démonstration. Un élément k de \mathbb{Z}^d étant fixé, cherchons une majoration de la quantité

$$\left| \int_{T^{-n}C} \exp(2i\pi \langle k, t \rangle) dm_s(t) \right|.$$

Il existe K_1 indépendant de k et v_1^k, \dots, v_r^k une base isométrique à v_1, \dots, v_r tel que pour tout j on ait

$$|\langle k, v_j^k \rangle|^{-1} \leq K_1 \|\Pi_s k\|^{-1},$$

où Π_s désigne la projection orthogonale sur F_s . Pour tout r -uplet d'entiers (l_1, \dots, l_r) , définissons les ensembles F_{l_1, \dots, l_r}^k par

$$F_{l_1, \dots, l_r}^k = \left\{ \sum_1^r x_j \langle k, v_j^k \rangle^{-1} v_j^k / \forall j = 1, \dots, r \ l_j \leq x_j \leq l_j + 1 \right\}.$$

Quel que soit (l_1, \dots, l_r) , on a

$$\begin{aligned} \int_{F_{l_1, \dots, l_r}^k} \exp(2i\pi \langle k, t \rangle) dm_s(t) &= \prod_{j=1}^r \int_{l_j}^{l_j+1} \exp(2i\pi \langle k, v_j^k \rangle^{-1} \langle k, v_j^k \rangle x_j) d(x_j) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc, si nous appelons D_n^k l'ensemble des points de $T^{-n}C$ qui n'appartiennent pas à un pavé F_{l_1, \dots, l_r}^k inclus dans $T^{-n}C$, on a immédiatement la majoration

$$\left| \int_{T^{-n}C} \exp(2i\pi \langle k, t \rangle) dm_s(t) \right| \leq m_s(D_n^k).$$

Il existe K' telle que, si $y \in D_n^k$, alors pour un certain j entre 1 et r on a $d(y, \partial T^{-n}C) \leq K' | \langle k, v_j^k \rangle |^{-1}$; donc

$$D_n^k \subset \{y \in T^{-n}C / d(y, \partial T^{-n}C) \leq K_1 K' |\Pi_s k|^{-1}\},$$

D'autre part, la restriction de M à F_s étant contractante, il existe $K_2 > 0$ et $\lambda \in]0, 1[$ tels que

$$T^n D_n^k \subset \{y \in C / d(y, \partial C) \leq K_2 \lambda^n |\Pi_s k|^{-1}\},$$

où d' désigne la distance euclidienne associée à la base v_1, \dots, v_r . D'après le lemme précédent on a donc

$$m_s(T^n D_n^k) \leq K_2 \lambda^n |\Pi_s k|^{-1} a(C),$$

puis

$$m_s(D_n^k) \leq K_2 \lambda^n |\Pi_s k|^{-1} \Delta^n a(C),$$

où Δ désigne la valeur absolue du déterminant de M_s^{-1} . Il vient alors, en notant que $m_s(T^{-n}C) = \Delta^n m_s(C)$,

$$\frac{m_s(D_n^k)}{m_s(T^{-n}C)} \leq K_2 \lambda^n |\Pi_s k|^{-1} \frac{a(C)}{m_s(C)}.$$

On conclut en utilisant la majoration donnée par le lemme de Katznelson : il existe K_3 et K_4 tels que

$$|\Pi_s k|^{-1} \leq K_3 d(k, F_u + F_e)^{-1} \leq K_4 \|k\|^{d-r}.$$

□

Proposition 3.17. *Soit $f \in L^2(\mathbb{T}^d)$ d'intégrale nulle et de série de Fourier*

$$f(\cdot) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} c_k \exp(2i\pi \langle k, \cdot \rangle).$$

S'il existe $K > 0$ et $\beta > 2$ tels que

$$\sum_{\|k\| > b} |c_k|^2 < K \log^{-\beta}(b)$$

alors la série

$$\sum_{n > 0} \|E(f | \mathcal{A}_n)\|_2$$

est convergente.

Démonstration. Soient $\eta > 0$ et $\epsilon \in]0, 1[$ tels que M_s^{-n} dilate les distances avec un coefficient multiplicatif supérieur à $\eta \epsilon^{-n}$ et soit θ tel que $\theta^r \in]\lambda, 1[$. Posons

$$V_n = \{x / \mathcal{P}_0^\infty(T^n x) \text{ contient une boule dans } F_s \text{ de rayon } \eta \theta^n\}.$$

Posons

$$W_n = \{y / \forall j \geq 0 \ d(T^j y, \partial \mathcal{P}(T^j y)) \geq \epsilon^j \theta^n\}.$$

Si $y \in W_n$, alors $\mathcal{P}(T^j y) \cap (T^j y + F_s)$ contient la boule $B_s(T^j y, \theta^n \epsilon^j)$. Ceci entraîne que l'ensemble $T^{-j}(\mathcal{P}(T^j y) \cap (T^j y + F_s))$ contient la boule $B_s(y, \theta^n \eta)$. Mais

$$\mathcal{P}_0^\infty(y) \supset \bigcap_{j \geq 0} T^{-j}(\mathcal{P}(T^j y) \cap (T^j y + F_s)),$$

donc, si $y \in W_n$, $\mathcal{P}_0^\infty(y)$ contient la boule $B_s(y, \theta^n \eta)$. En d'autres termes $T^{-n}V_n$ contient W_n . Mais par ailleurs le bord des éléments de \mathcal{P} étant régulier, il existe $L > 0$ tel que

$$m\{y / d(T^j y, \partial \mathcal{P}(T^j y)) \leq \epsilon^j \theta^n\} \leq L \epsilon^j \theta^n.$$

Le complémentaire de W_n est donc de mesure inférieure à $\sum_{j \geq 0} L \epsilon^j \theta^n = L(1 - \epsilon)^{-1} \theta^n$; il en est de même du complémentaire de V_n .

Pour une quantité $b(n)$ quelconque écrivons

$$f_{1n} = \sum_{\|k\| < b(n)} c_k \exp(2i\pi \langle k, \cdot \rangle) \text{ et } f_{2n} = \sum_{\|k\| < b(n)} c_k \exp(2i\pi \langle k, \cdot \rangle).$$

On a bien sûr

$$\|E(f_{1n} | \mathcal{A}_n)\|_2^2 = \int_{V_n} |E(f_{1n} | \mathcal{A}_n)|^2 dm + \int_{cV_n} |E(f_{1n} | \mathcal{A}_n)|^2 dm.$$

Si x appartient à V_n , le lemme précédent montre que, pour tout $k \in \mathbb{Z}^d$, il existe K tel que

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}(\exp(2i\pi \langle k, \cdot \rangle) | \mathcal{A}_n)(x)| &= \frac{1}{m_s(T^{-n}\mathcal{P}_0^\infty(T^n x))} \\ &\quad \left| \int_{T^{-n}\mathcal{P}_0^\infty(T^n x)} \exp(2i\pi \langle k, t \rangle) dm_s(t) \right| \\ &\leq K \frac{a(\mathcal{P}_0^\infty(T^n x))}{m_s(\mathcal{P}_0^\infty(T^n x))} \|k\|^{d-r} \lambda^n \end{aligned}$$

Lorsque x appartient à V_n , $\mathcal{P}_0^\infty(T^n x)$ est un convexe de $T^n x + F_s$ contenant une boule de rayon θ^n , donc est de m_s -mesure supérieure à une constante fois θ^{rn} , on en déduit qu'il existe une constante $R_0 > 0$ telle que

$$\begin{aligned} \int_{V_n} |E(f_{1n} | \mathcal{A}_n)|^2 dm &= \int_{V_n} \left| \sum_{\|k\| < b(n)} c_k \mathbb{E}(\exp(2i\pi \langle k, \cdot \rangle) | \mathcal{A}_n)(x) \right|^2 dm(x) \\ &\leq \sup_{x \in V_n} \left(\sum_{\|k\| < b(n)} |c_k| K \|k\|^{d-r} \frac{a(\mathcal{P}_0^\infty(T^n x))}{m_s(\mathcal{P}_0^\infty(T^n x))} \lambda^n \right)^2 \\ &\leq R_0 b(n)^{2(2d-r)} (\lambda/\theta^r)^{2n}. \end{aligned}$$

Par ailleurs on voit facilement qu'il existe $R_1 > 0$ tel que

$$\begin{aligned} \int_{cV_n} |E(f_{1n} | \mathcal{A}_n)|^2 dm &\leq m(cV_n) \left(\sum_{\|k\| < b(n)} |c_k| \right)^2 \\ &\leq R_1 b(n)^{2d} \theta^n. \end{aligned}$$

Nous pouvons alors écrire

$$\begin{aligned} \|E(f_{1n}|\mathcal{A}_n)\|_2 &\leq (R_0 b(n)^{2(2d-r)} (\lambda/\theta^r)^{2n} + R_1 b(n)^{2d} \theta^n)^{1/2} \\ &\leq R_2 b(n)^{2d-r} \gamma^n, \end{aligned}$$

pour deux réels $R_2 > 0$ et $\gamma \in]0, 1[$. D'autre part on a

$$\|E(f_{2n}|\mathcal{A}_n)\|_2 \leq \|f_{2n}\|_2 \leq \log^{\beta/2}(b(n)).$$

et, comme

$$\|E(f|\mathcal{A}_n)\|_2 \leq \|E(f_{1n}|\mathcal{A}_n)\|_2 + \|E(f_{2n}|\mathcal{A}_n)\|_2,$$

on voit, en prenant $b(n) = \gamma^{\frac{-n}{2(2d-r)}}$, que la série $\sum_{n>0} \|E(f|\mathcal{A}_n)\|_2$ converge. \square

Le dernier théorème énoncé dans le chapitre 1 nous permet d'énoncer le résultat suivant.

Théorème 3.18. *Soit $f \in L^2(\mathbb{T}^d)$ d'intégrale nulle et de développement de Fourier $f(\cdot) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} c_k \exp(2i\pi \langle k, \cdot \rangle)$. S'il existe $K > 0$ et $\beta > 2$ tels que*

$$\sum_{\|k\|>b} |c_k|^2 < K \log^{-\beta}(b).$$

Alors, si f n'est pas un cobord, f vérifie le TCL fonctionnel, le TCL pour les sous-suites et le principe d'invariance fort de Strassen.

Remarque : La condition du théorème est vérifiée sous l'hypothèse de décroissance des coefficients de Fourier suivante :

$$|c_{(k_1, \dots, k_d)}| \leq K \prod_1^d \frac{1}{(1 + |k_i|)^{1/2} \log^\beta(2 + |k_i|)},$$

avec $\beta > 2$. C'est une hypothèse légèrement plus forte que celle obtenue par Leonov.

4. LE TLC POUR LE FLOT GÉODÉSIQUE EN COURBURE CONSTANTE ET UNE APPLICATION GÉOMÉTRIQUE

Il est très facile de construire une filtration \mathcal{A}_n dont les atomes sont des morceaux de feuilles stables. Lorsque c'est fait, pour les fonctions lipschitziennes f , la convergence de la série $\sum_{n<0} \|f - E(f|\mathcal{A}_n)\|_2$ est très facile à obtenir. Le seul problème véritable est d'obtenir la convergence de la série $\sum_{n>0} \|E(f|\mathcal{A}_n)\|_2$. Deux types de difficultés surviennent : contrôler la forme des atomes des tribus considérées, établir la bonne répartition de grand morceaux de feuilles stables dont les bords ne sont pas trop compliqués. Dans les exemples précédents, la théorie des représentations ou des séries de Fourier fournit la deuxième information. La première provenait de la convexité ou bien du fait que les feuilles stables étaient de dimension 1. Nous allons maintenant montrer comment la méthode s'applique à d'autres situations algébriques.

4.1. Exemple 5 : le flot géodésique en dimension d , en courbure constante dans le cas compact. Nous nous intéressons au flot géodésique sur une variété de dimension d compacte hyperbolique de courbure constante négative. Un tel flot est algébriquement défini de la façon suivante. Considérons le groupe $SO(1, d)$ des matrices qui préserve la forme quadratique :

$$\langle x, x \rangle = x_0^2 - \sum_{k=1}^d x_k^2$$

définie sur \mathbb{R}^{d+1} . Ce groupe a deux composantes connexes. La composante de l'identité est un sous-groupe d'indice deux noté $PSO(1, d)$. Le fibré unitaire tangent d'une variété compacte de courbure constante négative X peut être identifié à un quotient $SO(d-1) \backslash PSO(1, d) / \Gamma$ où $SO(d-1)$ désigne abusivement l'ensemble des matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & R \end{pmatrix}$$

avec $R \in SO(d-1)$ et Γ est un sous-groupe discret de $PSO(1, d)$. Le flot géodésique est défini par le groupe à un paramètre $(g_t)_{t \in \mathbb{R}}$ des matrices

$$g_t = \begin{pmatrix} \cosh(t) & \sinh(t) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \sinh(t) & \cosh(t) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

qui commute avec les matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & R \end{pmatrix}$$

de sorte que l'action est bien définie sur $SO(d-1) \backslash PSO(1, d) / \Gamma$. L'action de $(g_t)_{t \in \mathbb{R}}$ sur $PSO(1, d) / \Gamma$ est appelée flot sur l'espace des repères. C'est cette action qui va nous intéresser.

Dans la suite g_t désigne indifféremment la matrice ou la transformation qu'elle définit sur $PSO(1, d) / \Gamma$ par

$$g_t : PSO(1, d) / \Gamma \longrightarrow PSO(1, d) / \Gamma : \bar{x} \longmapsto g_t \bar{x}.$$

Comme plus haut nous travaillerons avec le système dynamique en temps continu $(G/\Gamma, T = g_1, \bar{\mu})$ et nous traitons uniquement le cas des fonctions höldériennes. La **variance** $\sigma^2(\varphi)$ est la limite (quand elle existe et est finie) :

$$\sigma^2(\varphi) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \|\varphi + T\varphi + \dots + T^{n-1}\varphi\|_2^2.$$

Soit $S_n\varphi$ la somme $\varphi + T\varphi + \dots + T^{n-1}\varphi$. Comme en dimension 2 nous avons des horigroupes dilatés ou contractés par g_t : pour $v, w \in \mathbb{R}^{d-1}$, $v = (v_2, \dots, v_d)$,

$$\theta_v^+ = \begin{pmatrix} 1 + \frac{|v|^2}{2} & -\frac{|v|^2}{2} & v_2 & v_3 & \dots & v_{d-1} & v_d \\ \frac{|v|^2}{2} & 1 - \frac{|v|^2}{2} & v_2 & v_3 & \dots & v_{d-1} & v_d \\ v_2 & -v_2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ v_3 & -v_3 & 0 & 1 & & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & 1 & 0 \\ v_d & -v_d & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et $\theta_w^- = {}^t\theta_w^+$ la transposée de θ_w^+ . Un calcul simple montre qu'on a les relations

$$\begin{aligned} \theta_v^+ \theta_{v'}^+ &= \theta_{v+v'}^+, & \theta_w^- \theta_{w'}^- &= \theta_{w+w'}^-, \\ g_t \theta_v^+ g_{-t} &= \theta_{e^t v}^+, & g_t \theta_w^- g_{-t} &= \theta_{e^{-t} w}^-. \end{aligned}$$

Les feuilles stables et instables pour l'action sur l'espace des repères sont donc facile à décrire : ce sont les orbites du groupe \mathbb{R}^{d-1} sur $PSO(1, d)/\Gamma$. Au niveau de l'espace $SO(d-1) \backslash PSO(1, d)/\Gamma$, la description des feuilles est plus compliquée. À ce niveau l'action de $(g_t)_{t \in \mathbb{R}}$ définit un flot d'Anosov : des méthodes puissantes donnent accès à divers résultats dont le tlc. La méthode des martingales donne le clt pour le flot des repères.

La mesure de Liouville est la mesure sur $X = PSO(1, d)/\Gamma$ déduite de la mesure de Haar sur $PSO(1, d)$. Soit μ cette mesure normalisée de sorte que $\mu(X) = 1$. Les quatre groupes K ($\in SO(d-1)$), θ_v^+ , g_t , θ_w^- définissent un système de coordonnées locales :

$$\begin{aligned} (v, t, k, w) &\mapsto \theta_v^+ g_t k \theta_w^- x, & (v, t, w) &\in [-2r_0, 2r_0]^{2d-1}, k \in B_{SO(d-1)}(2r_0) \\ (v, t, k, w) &\mapsto \theta_w^- g_t k \theta_v^+ x, & (v, t, w) &\in [-2r_0, 2r_0]^{2d-1}, k \in B_{SO(d-1)}(2r_0) \end{aligned}$$

pour r_0 assez petit. L'expression de la mesure μ dans ces systèmes de coordonnées est

$$\int f(gx) d\mu(g) = \int_{[-r_0, r_0]^{2d-1} \times B_{SO(d-1)}(\delta)} f(\theta_v^+ g_t k \theta_w^- x) e^{(d-1)t} dv dt dw dk.$$

Nous recouvrons X grâce à une famille finie de "boîtes" \mathcal{R} de la forme

$$(v, t, k, w) \mapsto \theta_v^+ g_t k \theta_w^- x, \quad (v, t, w) \in [-r_0, r_0]^{2d-1}, k \in B_{SO(d-1)}(r_0).$$

Ce recouvrement induit une partition finie \mathcal{P} , dont nous coupons les atomes en "tranches" paramétrées par θ^+ pour obtenir une partition (infinie, non dénombrable) \mathcal{Q} :

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \left\{ \bigcap_{R \in \mathcal{R}} A_R \mid A_R = R \text{ or } {}^c R \right\}, \\ \mathcal{Q}(x) &= \mathcal{P}(x) \bigcap_{[-2r_0, 2r_0]^{d-1}} \theta^+. \end{aligned}$$

Si un point y appartient à deux boîtes

$$y = \theta_v^+ g_t k \theta_w^- x = \theta_{v'}^+ g_{t'} k' \theta_{w'}^- \bar{x}'$$

alors $\theta_u^+ y$ est encore dans ces deux boîtes si $u+v$ et $u+v'$ appartiennent à $[-r_0, r_0]^{d-1}$. Nous en déduisons que les atomes de \mathcal{Q} ont la forme suivante :

$$\mathcal{Q}(y) = \{\theta_u^+ y / u \in \prod_{k=2}^d [\alpha_l(k, y), \alpha_u(k, y)]\}.$$

Comme précédemment, définissons

$$\mathcal{Q}_0^\infty(x) = \mathcal{Q}(x) \cap T\mathcal{Q}(T^{-1}x) \cap T^2\mathcal{Q}(T^{-2}x) \cap \dots$$

C'est la partition la plus grossière parmi celles qui sont plus fines que \mathcal{Q} et qui sont incluses dans leur image par T^{-1} .

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ appelons \mathcal{A}_n la tribu dont les atomes sont les ensembles $T^{-n}\mathcal{Q}_0^\infty$. La suite (\mathcal{A}_n) est une filtration croissante. L'atome de \mathcal{A}_n contenant x est

$$\mathcal{A}_n(x) = T^{-n}\mathcal{Q}(T^n x) \cap T^{-(n-1)}\mathcal{Q}(T^{n-1}x) \cap T^{-(n-2)}\mathcal{Q}(T^{n-2}x) \cap \dots = T^{-n}\mathcal{A}_0(T^n x).$$

L'égalité $\mathcal{A}_1(x) = T^{-1}\mathcal{Q}(Tx) \cap \mathcal{A}_0(x)$ montre que les atomes de \mathcal{A}_0 sont des réunions d'atomes de \mathcal{A}_1 .

Comme dans les exemples précédents, considérons l'ensemble $W_n^{\delta, \beta}$ ($\delta, \beta \in]1, \infty[$)

$$W_n^{\delta, \beta} = \{x \in G/\Gamma / \forall k \geq 0 \Delta^+(\beta^{-n}\delta^{-k})T^{-k}x \subset \mathcal{Q}(T^{-k}x)\}.$$

Nous avons $T\Delta^+(r)T^{-1} = \Delta^+(er)$.

Si $1 < \delta < e$ alors, pour x dans $W_n^{\delta, \beta}$, pour tout $k \geq 0$, nous avons

$$\Delta^+(\beta^{-n})x \subset \Delta^+(\beta^{-n}e^k\delta^{-k})x \subset T^k\Delta^+(\beta^{-n}\delta^{-k})T^{-k}x,$$

donc

$$\Delta^+(\beta^{-n})x \subset \mathcal{Q}_0^\infty(x).$$

Par ailleurs, comme les bords de \mathcal{Q} sont réguliers, il existe $C > 0$ tel que, pour tout $\epsilon > 0$, nous ayons

$$\mu\{x \in G/\Gamma : \Delta^+(\epsilon)x \cap \partial\mathcal{Q}(x) \neq \emptyset\} \leq C\epsilon.$$

Cela nous permet d'établir le lemme suivant :

Lemme 4.1. *Il existe $C > 0$ et $q > 0$ tels que*

$$\mu({}^c W_n^{\delta, \beta}) \leq C\beta^{-n}.$$

Démonstration. C'est une conséquence des calculs suivants (nous utilisons l'invariance de la mesure à la deuxième ligne)

$$\begin{aligned} \mu({}^c W_n^{\delta, \beta}) &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \mu\{x / \Delta^+(\beta^{-n}\delta^{-k})T^{-k}x \cap \partial\mathcal{Q}(T^{-k}x) \neq \emptyset\} \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \mu\{x / \Delta^+(\beta^{-n}\delta^{-k})x \cap \partial\mathcal{Q}(x) \neq \emptyset\} \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} C\beta^{-n}\delta^{-k}. \end{aligned}$$

□

Les atomes de \mathcal{Q}_0^∞ contiennent avec grande probabilité un morceau de feuille instable de taille supérieure à β^{-n} .

Pour obtenir le tlc il nous faut montrer que les grands morceaux de feuilles instables sont bien répartis dans X . Formulé autrement il nous faut une information quantitative sur l'équidistribution des horispheres dans X . Nous allons l'obtenir par l'intermédiaire des propriétés de mélange de g_t . Dans notre cadre algébrique ces propriétés de mélange sont les propriétés de décroissance des coefficients matriciels pour certaines représentations unitaires de $PSO(1, d)$. Nous allons décrire une façon d'obtenir ce mélange qui ressemble à la façon d'obtenir une information sur la décroissance des coefficients de Fourier d'une fonctions plusieurs fois dérivables en utilisant l'intégration par parties. Cette idée est encore valable dans le cas qui nous intéresse à condition de remplacer les fonctions exponentielles par les fonctions dites K -finies et la différentiation par l'application de l'opérateur différentiel de Casimir.

Considérons π la restriction à $L_0^2(G/\Gamma)$ (les fonctions de moyenne nulle) de la représentation de G sur $L^2(G/\Gamma)$ par translation à gauche. Bekka montre dans [3] que π ne contient pas faiblement l'identité. Grâce à [50] on en déduit que π est fortement L^p pour un certain p . Alors [33] donne le théorème suivant.

Théorème 4.2. *Il existe $\zeta > 1$ tel que pour toutes fonctions K -finies φ, ψ dans $L_0^2(G/\Gamma)$ et tout $t \in \mathbb{R}$ on ait*

$$|\langle g_t \varphi, \psi \rangle| \leq C \dim_K(\varphi)^{\frac{1}{2}} \dim_K(\psi)^{\frac{1}{2}} \|\varphi\| \|\psi\| \zeta^{-t}.$$

La décroissance exponentielle des correlations est donc satisfaite pour les fonction K -finies (c'est-à-dire les fonctions φ pour lesquelles l'espace vectoriel engendré par l'action de K (par translation à gauche : $\varphi(k^{-1}\cdot)$) est de dimension finie (dénotée $\dim_K(\varphi)$). Nous expliquons maintenant comment passer du cas des fonctions K -finies aux fonctions C^∞ (see [37]).

L'action de K sur X définit une représentation unitaire U de K sur $L^2(\mu)$ par $k \longmapsto \varphi(k^{-1}x)$, qui peut être décomposée comme sommes de représentations irréductibles. Soit \hat{K} l'ensemble des classes d'équivalence de représentations irréductible de K et δ un élément de \hat{K} .

Fixons une base R du système de racines de \mathcal{K} l'algèbre de Lie K . Appelons W la chambre de Weyl associée. À toute représentation irréductible de K est associée une forme linéaire appartenant à un réseau de W qu'on appelle le poids dominant de la représentation. Soit δ un élément de \hat{K} et γ_δ le poids dominant associé.

Fixons une base du système de racines, R , de \mathcal{K} l'algèbre de Lie de K . Appelons W la chambre de Weyl associée. Chaque représentation irréductible de K est déterminée de façon unique par une forme linéaire appartenant à un réseau et à \overline{W} (appelé poids dominant de la représentation). Soient δ un élément de \hat{K} et $\gamma(\delta)$ le poids dominant correspondant.

La formule de Weyl donne la dimension, $d(\delta)$, de δ en fonction de γ :

$$d(\delta) = \prod_{\alpha \in R_+} \frac{\langle \alpha, \gamma + \rho \rangle}{\langle \alpha, \rho \rangle},$$

où R_+ est l'ensemble des racines positives et ρ la demi-somme des racines positives. Pour tout $\delta \in \hat{K}$, notons ξ_δ le caractère de δ et $\chi_\delta = d(\delta)\xi_\delta$. Posons

$$P(\delta) = U(\overline{\chi_\delta}) = d(\delta) \int_K \overline{\xi_\delta(k)} U(k) dk.$$

On remarque que $\|P_\delta \varphi\|_\infty \leq d_\delta^2 \|\varphi\|_\infty$. Les relations d'orthogonalité sur les caractères permettent de montrer que $P(\delta)$ est un projecteur. C'est le projecteur sur la composante isotypique \mathcal{F}_δ de \mathcal{F} . On a

$$\mathcal{F} = \bigoplus_{\delta \in \hat{K}} P(\delta) \mathcal{F}.$$

Un vecteur v appartenant à \mathcal{F}_δ est K -fini :

$$\dim \text{Vect} K v \leq d(\delta)^2.$$

On dit qu'un vecteur v est indéfiniment dérivable si l'application $k \mapsto U(k)v$ est indéfiniment dérivable. On définit sur l'espace des vecteurs indéfiniment dérivables la représentation dérivée de U , qui est une représentation de l'algèbre de Lie de K et qui s'étend en une représentation de l'algèbre enveloppante universelle de \mathcal{K} . Nous utiliserons la même lettre U pour désigner ces trois représentations.

Soit X_1, \dots, X_n une base orthonormale pour un produit scalaire invariant sur \mathcal{K} . L'opérateur $\Omega = 1 - \sum_{i=1}^n X_i^2$ appartient au centre de l'algèbre enveloppante universelle de \mathcal{K} . On en déduit (lemme de Schur) que, si μ_δ est une représentation appartenant à δ , il existe $c(\delta)$ tel que

$$\mu_\delta(\Omega) = c(\delta)\mu_\delta(1).$$

Les opérateurs $\Omega(X_i)$ étant anti-hermitiens, $c(\delta)$ est un nombre réel supérieur ou égal à 1. On montre (cf. [2]) qu'il existe un produit scalaire Q tel que

$$c(\delta) = 1 + Q(\gamma(\delta) + \rho) - Q(\rho).$$

On dit qu'un vecteur v est indéfiniment dérivable si l'application Pour tout vecteur indéfiniment dérivable v , on a d'une part

$$P(\delta)U(\Omega)v = c(\delta)P(\delta)v,$$

d'autre part $\|P(\delta)v\| \leq \|v\|$, ce qui entraîne que, pour tout entier m positif, pour tout δ appartenant à \hat{K} , on a

$$\|P(\delta)v\| \leq c(\delta)^{-m} \|U(\Omega^m)v\|.$$

L'ensemble \hat{K} s'identifie à l'ensemble des points d'un réseau appartenant à l'adhérence de la chambre de Weyl W . Comme la fonction $d(\delta)$ est polynomiale et la fonction $c(\delta)$ est quadratique, si m est suffisamment grand la somme $\sum_{\delta \in \hat{K}} d(\delta)c(\delta)^{-m}$ est finie.

On peut alors énoncer le théorème suivant :

Théorème 4.3. *Soient v et w deux vecteurs indéfiniment dérivables d'une représentation U sans vecteur invariant. Il existe des constantes $C > 0$ et m telles que*

$$|\langle U()v, w \rangle| \leq C \Psi() \|\Omega^m v\| \|\Omega^m w\|.$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} |\langle U()v, w \rangle| &= \left| \left\langle \sum_{\delta \in \hat{K}} U()P(\delta)v, \sum_{\zeta \in \hat{K}} P(\zeta)w \right\rangle \right| \\ &\leq C \Psi() \sum_{\delta \in \hat{K}, \zeta \in \hat{K}} \|P(\zeta)w\| \|P(\delta)v\| d(\delta)d(\zeta) \\ &\leq C \Psi() \|\Omega^m v\| \|\Omega^m w\| \sum_{\delta \in \hat{K}, \zeta \in \hat{K}} d(\delta)d(\zeta)c(\delta)^{-m}c(\zeta)^{-m} \\ &\leq C \Psi() \|\Omega^m v\| \|\Omega^m w\| \left(\sum_{\delta \in \hat{K}} d(\delta)c(\delta)^{-m} \right)^2. \end{aligned}$$

□

Corollaire 4.4. *Soient φ et ψ deux fonctions indéfiniment dérivables définies sur G/Γ d'intégrales nulles. Il existe $\zeta > 1$, $C'_0 > 0$ et un entier m tel que*

$$(1) \quad |\langle \varphi, \psi \circ T^m \rangle| \leq C \|\Omega^m \varphi\|_2 \|\Omega^m \psi\|_2 \zeta^{-|m|}.$$

Démonstration. Le théorème précédent s'applique à la représentation régulière sur l'espace $L_0^2(X)$ (qui n'a pas de vecteur invariant). □

Revenons au tlc. Ici nous ne considérons que le cas de l'action au temps 1 $T = g_1$ du flot g_t . Le théorème en temps continu s'en déduit.

Comme nous l'avons déjà dit notre démonstration repose sur une information quantitative de la répartition des feuilles instable de T dans $X = G/\Gamma$. Nous allons déduire cette information du mélange exponentiel pour T . Ce lien entre décorrélation et équidistribution des feuilles instables a déjà été utilisés par différents auteurs (cf. par exemple [39]). Il est assez facile à comprendre.

Nous utiliserons les notations suivantes :

$$\Delta^-(\epsilon) = \theta_{[-\epsilon, \epsilon]^{d-1}}^- = \{\theta_w^- / w \in [-\epsilon, \epsilon]^{d-1}\}$$

$$\Delta^+(\epsilon) = \theta_{[-\epsilon, \epsilon]^{d-1}}^+ = \{\theta_w^+ / w \in [-\epsilon, \epsilon]^{d-1}\}$$

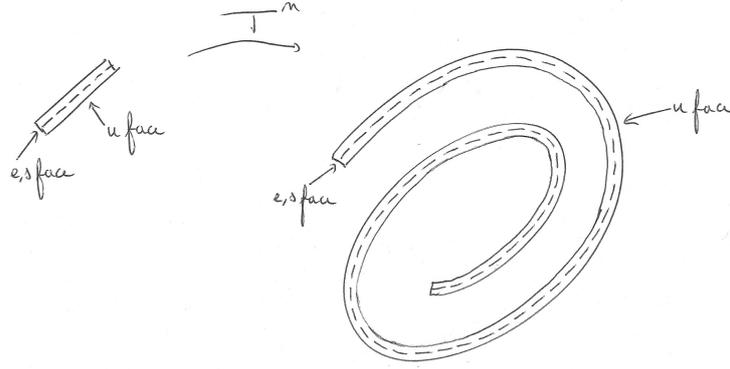
et $B_K(\epsilon)$ l'ensemble $K \cap B(Id, \epsilon)$. Fixons $\epsilon > 0$ et considérons un ensemble $F \subset \theta^+$ contenant $\Delta^+(\epsilon)$. Soit \mathcal{U} l'ensemble $\theta_{[-\epsilon, \epsilon]^{d-1}}^- g([\epsilon, \epsilon]) B_K(Id, \epsilon) F$ et $\mathcal{U}_n = T^n \mathcal{U} T^{-n}$. Comme T contracte θ^- par une facteur e et commutes avec K et g , nous avons

$$\mathcal{U}_n = \theta_{[e^{-n}\epsilon, e^{-n}\epsilon]^{d-1}}^- g([\epsilon, \epsilon]) B_K(Id, \epsilon) T^{-n} F T^n.$$

Prenons $\epsilon > 0$ assez petit pour que l'application

$$(v, t, k, w) \longmapsto \theta_v^+ g_t k \theta_w^- x$$

soit un difféomorphisme sur son image dans G/Γ .



On peut écrire :

$$\begin{aligned}
 \langle T^{-n}1_U, \varphi \rangle &= \int_{T^n U} \varphi(y) d\mu(y) \\
 &= \int_{[-e^{-n}\epsilon, e^{-n}\epsilon]^{d-1} \times [-\epsilon, \epsilon] \times B_K(\epsilon) \times T^n FT^{-n}} \varphi(\theta_v^- g_t k \theta^+ T^n x) e^{(d-1)t} dv dt dk d\theta^+.
 \end{aligned}$$

Pour les points intervenant dans cette intégrale, il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$d(\theta_v^- g_t k \theta^+ T^n x, \theta^+ T^n x) \leq C\epsilon.$$

Comme φ est C^∞ , nous avons :

$$|\varphi(\theta_v^- g_t k \theta^+ T^n x) - \varphi(\theta^+ T^n x)| \leq C\epsilon$$

donc,

$$\begin{aligned}
 |\langle T^{-n}1_U, \varphi \rangle - \int_{[-e^{-n}\epsilon, e^{-n}\epsilon]^{d-1} \times [-\epsilon, \epsilon] \times B_K(\epsilon) \times T^n FT^{-n}} \varphi(\theta^+ T^n x) e^{(d-1)t} dv dt d\theta^+| \\
 \leq C\epsilon \mu(U).
 \end{aligned}$$

En divisant par $\mu(U)$ (qui est supérieur à $c\epsilon^D$ pour un certain $c > 0$, $D = \frac{d(d+1)}{2}$ la dimension de $PSO(1, d)$) nous obtenons :

$$(2) \quad \left| \frac{1}{m_u(T^n FT^{-n})} \int_{T^n FT^{-n}} \varphi(\theta^+ T^n x) d\theta^+ \right| \leq C \left(\frac{|\langle T^{-n}1_U, \varphi \rangle|}{\epsilon^D} + \epsilon \right).$$

Reste à majorer la quantité $|\langle T^{-n}1_U, \varphi \rangle|$ qui est petite en raison de la décroissance des corrélations. Comme 1_U n'est pas différentiable, il faut la régulariser. Pour un nombre réel ρ supérieur à 1, appelons ρ -identité une suite (χ_n) de fonctions C^∞ définies sur $G = PSO(1, d)$, positive ou nulle, d'intégrale 1, et telle qu'il existe $C > 0$ pour lequel, pour tout n ,

- le support de χ_n est inclus dans $B(Id, \rho^{-n})$,
- $\|\Omega^m \chi_n\|_\infty \leq C\rho^{Cn}$,
- χ_n est lipschitzienne de constante de Lipschitz ρ^{Cn} .

De telles suites existent. Pour une fonction localement intégrable ψ sur $G = PSO(1, d)$, posons :

$$\chi_n * \psi(x) = \int_G \psi(g^{-1}x) \chi_n(g) dg = \int_G \psi(g) \chi_n(xg^{-1}) dg.$$

Nous identifions l'algèbre de Lie de G et l'ensemble des champs de vecteurs invariant à droite sur G . Alors, pour tout n , les fonctions $\chi_n * \psi$ sont indéfiniment différentiables et, pour tout opérateur différentiel Ω appartenant à l'algèbre enveloppante universelle de G , $\Omega(\chi_n * \psi) = (\Omega\chi_n) * \psi$. Soit φ une fonction $\bar{\mu}$ -intégrable définie sur G/Γ . On lui associe une fonction φ définie sur G localement intégrable en posant $\varphi(x) = \varphi(\bar{x})$. On vérifie immédiatement (sur la première définition) que $\chi_n * \varphi$ est invariante par translation à droite par les éléments de Γ . Il lui correspond donc une fonction définie sur G/Γ : nous la noterons φ_n .

Soit $\partial U(\beta)$ l'ensemble des points de G/Γ à distance inférieure à β du bord de U . Soit φ une fonction C^∞ sur G/Γ de moyenne nulle.

L'inégalité de mélange (1) appliquée à $\chi_n^{(\rho)} * 1_U$ et φ et les propriétés de la suite $\chi_n^{(\rho)}$ assure l'existence d'une constante $C > 0$ telle que :

$$|\langle T^{-n}(\chi_n^{(\rho)} * 1_U), \varphi \rangle| \leq C \|\Omega^m \chi_n^{(\rho)} * 1_U\|_2 \|\Omega^m \varphi\|_2 \zeta^{-n} \leq C \|\Omega^m \varphi\|_2 \rho^{Cn} \zeta^{-n}.$$

Par ailleurs nous avons :

$$|\langle 1_U \circ T^{-n}, \varphi \rangle - \langle (\chi_n^{(\rho)} * 1_U) \circ T^{-n}, \varphi \rangle| \leq \|\varphi\|_\infty \mu(\partial U(\rho^{-n})).$$

Grâce à ces inégalités et (2) nous obtenons

$$(3) \quad \left| \frac{1}{m_u(T^n F T^{-n})} \int_{T^n F T^{-n}} \varphi(\theta^{-n} x) d\theta^+ \right| \leq C \left(\frac{\mu(\partial U(\rho^{-n})) + \zeta^{-n} \rho^{Cn}}{\epsilon^D} + \epsilon \right).$$

Nous allons donner des valeurs adéquates à ϵ et ρ pour obtenir le théorème suivant.

Théorème 4.5. *Soit φ une fonction C^∞ sur G/Γ de moyenne nulle. Si φ n'est pas un cobord, alors elle satisfait le principe d'invariance de Donsker.*

Démonstration. Nous voulons montrer la convergence des deux séries :

$$\sum_{n>0} \|E(\varphi|\mathcal{A}_n)\|_2 < \infty \quad \text{et} \quad \sum_{n<0} \|\varphi - E(\varphi|\mathcal{A}_n)\|_2 < \infty.$$

Les partitions $\mathcal{Q}_n^\infty = T^{-n} \mathcal{Q}_0^\infty$ sont mesurables au sens de Rokhlin. Pour tout n , il exist des probabilités conditionnelles $(m_P)_{P \in \mathcal{P}_n^\infty}$ qui donnent les valeurs de l'espérance conditionnelle relativement à \mathcal{A}_n : pour toute fonction intégrable f , pour presque tout x ,

$$\mathbb{E}(f|\mathcal{A}_n)(x) = \int_{\mathcal{Q}_n^\infty(x)} f(y) dm_{\mathcal{Q}_n^\infty(x)}(y).$$

Par construction, nous avons une famille $\{F(n, x)\}_{n \in \mathbb{Z}, x \in G/\Gamma}$ de sous-ensemble de θ^+ telles que

$$\mathcal{A}_n(x) = F(n, x)x = T^{-n} \mathcal{A}_0(T^n x) = T^{-n} F(0, T^n x) T^n x,$$

et :

$$\mathbb{E}(\varphi|\mathcal{A}_n)(x) = \frac{1}{m_+(T^{-n} F(0, T^n x) T^n)} \int_{T^{-n} F(0, T^n x) T^n} \varphi(\theta^+ x) d\theta^+.$$

Pour de grands $n > 0$ ces quantités sont proches de la valeur de φ en x . Pour $-n$ on a

$$\mathbb{E}(\varphi|\mathcal{A}_{-n})(x) = \frac{1}{m_+(T^n F(0, T^{-n}x)T^{-n})} \int_{T^n F(0, T^{-n}x)T^{-n}} \varphi(\theta^+x) d\theta^+.$$

Soit φ une fonction C^∞ . Prenons un point $x \in T^n W_n^{\delta, \beta}$. Nous avons : $\Delta^+(\beta^n)T^{-n}x \subset \mathcal{Q}_0^\infty(T^{-n}x)$. Cette inégalité (3) donne :

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}(\varphi|\mathcal{A}_{-n})(x)| &= \left| \frac{1}{m_+(T^n F(0, T^{-n}x)T^{-n})} \int_{T^n F(0, T^{-n}x)T^{-n}} \varphi(\theta^+x) d\theta^+ \right| \\ &\leq C \left(\frac{\mu(\partial U(\rho^n)) + \zeta^{-n} \rho^{Cn}}{\beta^{-nD}} + \beta^{-n} \right), \end{aligned}$$

et, comme

$$\begin{aligned} \mu(\partial U(\rho^{-n})) &\leq C\rho^{-n}, \\ |\mathbb{E}(\varphi|\mathcal{A}_{-n})(x)| &\leq C \left(\frac{\rho^{-n} + \zeta^{-n} \rho^{Cn}}{\beta^{nD}} + \beta^{-n} \right). \end{aligned}$$

En prenant ρ et $\beta > 1$ suffisamment près de 1, cela montre l'existence de $\zeta > 1$ et $C > 0$ tel que

$$|\mathbb{E}(\varphi|\mathcal{A}_{-n})(x)| \leq C\zeta^{-n}.$$

Comme $\mu({}^c W_n^{\delta, \beta}) \leq C\beta^{-n}$, nous avons :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\mathbb{E}(\varphi|\mathcal{A}_{-n})^2) &= \int_{T^n W_n^{\delta, \beta}} \mathbb{E}(\varphi|\mathcal{A}_{-n})^2(x) d\mu(x) + \int_{T^n {}^c W_n^{\delta, \beta}} \mathbb{E}(\varphi|\mathcal{A}_{-n})^2(x) d\mu(x) \\ &\leq C\zeta^{-n} + C\beta^{-n} \|\varphi\|_\infty^2. \end{aligned}$$

Cela montre la convergence de la première série. La convergence de la seconde est triviale. \square

On dit qu'une fonction φ est η -höldérienne si la quantité suivante est finie :

$$C_\varphi^{(\eta)} = \sup_{y \neq x \in X} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{d(x, y)^\eta}.$$

Le théorème précédent est encore vrai si φ est η -höldérienne ou la fonction indicatrice d'un ensemble dont le bord est lisse (et une telle fonction n'est jamais un cobord). On peut le démontrer en régularisant φ par convolution :

$$x \mapsto \int_G \varphi(g) \chi_n(xg^{-1}) dg.$$

On a

$$\int_G \varphi(g) \chi_n(xg^{-1}) dg = \int_G \varphi(g^{-1}x) \chi_n(g) dg.$$

La première expression montre que la fonction définie est C^∞ , la seconde permet de contrôler la différence avec φ :

$$\left| \varphi(x) - \int_G \varphi(g) \chi_n(xg^{-1}) dg \right| \leq \int_G |\varphi(x) - \varphi(g^{-1}x)| \chi_n(g) dg.$$

Maintenant, si $\varphi = \mathbf{1}_{\mathbf{F}} - \mu(\mathbf{F})$, la deuxième expression donne

$$\int_X \left| \varphi(x) - \int_G \varphi(g) \chi_n(xg^{-1}) dg \right| d\mu(x) \leq C\mu(\partial F(\rho^{-n})).$$

Si φ est höldérienne ou bien la fonction indicatrice d'un ensemble à bord lisse alors elle est bien approchée par la fonction régularisée et on applique le raisonnement précédent en régularisant non seulement 1_U mais aussi φ .

4.2. Cobords et propriété d'accessibilité.

Théorème 4.6. *Soit G un groupe de Lie de dimension n , \mathcal{G} son algèbre de Lie, X_1, \dots, X_k des éléments de \mathcal{G} engendrant \mathcal{G} . Supposons que les crochets de Lie répétés des X_i de longueur inférieure à m engendrent linéairement l'espace vectoriel \mathcal{G} . Alors il existe $C > 0$, $a > 0$, un entier N et une suite (i_1, \dots, i_N) d'éléments de $\{1, \dots, k\}$ tel que, pour tout $r < a$, l'application*

$\phi : [-Cr^{1/m}, Cr^{1/m}]^N \rightarrow B(\text{Id}, r) \subset G : (t_1, \dots, t_N) \mapsto \exp(t_1 X_{i_1}) \dots \exp(t_N X_{i_N})$
soit surjective.

L'algèbre de Lie du groupe $PSO(1, d)$ est engendrée par les matrices

$$E_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ 1 & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } E_{kl} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

pour i allant de 1 à d et k, l tels que $1 \geq k < l \geq d$. On remarque que

$$[E_k, E_l] = E_{kl}.$$

Notons \tilde{E}_j les matrices $\tilde{E}_j = E_j + E_{1j}$. La sous-algèbre de Lie associée au groupe θ^+ est engendrée par ces matrices \tilde{E}_j pour j allant de 2 à d . L'algèbre du groupe θ^- , elle, est engendrée par les matrices $\check{E}_j = E_j - E_{1j}$. On vérifie les relations :

$$\begin{aligned} [E_{1k}, E_l] &= 0 \text{ si } k \neq l, \quad [E_{1k}, E_k] = E_1 \\ [\tilde{E}_k, \tilde{E}_l] &= 0, \quad [\check{E}_k, \check{E}_l] = 0 \\ [\tilde{E}_k, \check{E}_l] &= 2E_{kl} \text{ si } k \neq l, \quad [\tilde{E}_k, \check{E}_k] = 2E_1. \end{aligned}$$

L'algèbre de Lie de $PSO(1, d)$ est donc engendrée par les \tilde{E}_i, \check{E}_i et leurs crochets de Lie de longueur 2. On en déduit la proposition suivante.

Proposition 4.7. *Il existe $C > 0$, $a > 0$, un entier N , une suite (i_1, \dots, i_N) d'éléments de $\{1, \dots, d\}$ et des matrices F_{i_j} valant \tilde{E}_{i_j} ou \check{E}_{i_j} tels que, pour tout $r < a$, l'application*

$$\phi : [-C\sqrt{r}, C\sqrt{r}]^N \rightarrow B(\text{Id}, r) \subset G : (t_1, \dots, t_N) \mapsto \exp(t_1 F_{i_1}) \dots \exp(t_N F_{i_N})$$

soit surjective.

Or les flots

Proposition 4.8. *Soit φ une fonction höldérienne sur G/Γ d'ordre $\beta \leq 1$ sur T^1S . Si φ est un cobord dans l'ensemble des fonctions intégrables alors il existe une fonction ψ höldérienne d'ordre $\beta/2$ telle que $\varphi = \psi - \psi \circ T$.*

Démonstration. Par hypothèse il existe ψ intégrable d'intégrale nulle telle que $\varphi = \psi - T\psi$.

Pour tout entier $n \geq 1$ notons $S_n\varphi$ et $S_{-n}\varphi$ les sommes

$$S_n\varphi = \sum_0^{n-1} T^k\varphi,$$

$$S_{-n}\varphi = \sum_{-n}^{-1} T^k\varphi.$$

En utilisant l'égalité de cobord on montre facilement les égalités suivantes :

$$\frac{1}{N} \sum_1^N S_n\varphi = \psi - \frac{1}{N} \sum_1^N T^n\psi,$$

$$\frac{1}{N} \sum_1^N S_{-n}\varphi = -\psi + \frac{1}{N} \sum_1^N T^{-n}\psi.$$

Notons X_0 l'ensemble des points x tels que la valeur de ψ en x soit donnée par les limites

$$\psi(x) = \lim \frac{1}{N} \sum_1^N S_n\varphi(x) = - \lim \frac{1}{N} \sum_1^N S_{-n}\varphi(x).$$

Les transformations T et T^{-1} étant ergodiques l'ensemble sur lequel les suites $\frac{1}{N} \sum_1^N T^n\psi$ et $\frac{1}{N} \sum_1^N T^{-n}\psi$ tendent vers 0 est de mesure 1, donc X_0 est de mesure 1.

Soit $i \in I_1$. Les vecteurs \tilde{E}_i étant vecteurs propres de adE_1 associés respectivement aux valeurs propres 1 et -1, on a pour tout k et tout r

$$T^k \exp(r\tilde{E}_i)T^{-k} = \exp(e^k r \tilde{E}_i).$$

On a de même

$$T^k \exp(r\check{E}_i)T^{-k} = \exp(e^{-k} r \check{E}_i).$$

Supposons que x et $\exp(s\check{E}_i)x$ appartiennent tous les deux à X_0 . La régularité de φ conduisent alors aux inégalités suivantes : il existe R et R' positifs tels que

$$\begin{aligned} |T^k\varphi(x) - T^k\varphi(\exp(s\check{E}_i)x)| &= |\varphi(T^kx) - \varphi(T^k \exp(s\check{E}_i)x)| \\ &\leq Rd(T^kx, T^k \exp(s\check{E}_i)x)^\beta \\ &\leq R'e^{-k\beta}d(x, \exp(s\check{E}_i)x)^\beta. \end{aligned}$$

On en déduit

$$|S_n\varphi(x) - S_n\varphi(\exp(s\check{E}_i)x)| \leq R' \left(\sum_0^{n-1} e^{-k\beta} \right) d(x, h_t^s x)^\beta,$$

d'où l'existence de R'' tel que

$$|\psi(x) - \psi(\exp(s\check{E}_i)x)| \leq R'' d(x, \exp(s\check{E}_i)x)^\beta.$$

Si x et $\exp(s\exp(s\check{E}_i)x)x$ appartiennent tous les deux à X_0 on montre de la même façon en utilisant l'égalité $\psi(x) = -\lim \frac{1}{N} \sum_1^N S_{-n}\varphi$ que l'on a,

$$|\psi(x) - \psi(\exp(s\check{E}_i)x)| \leq R'' d(x, \exp(s\check{E}_i)x)^\beta.$$

Ceci signifie que la restriction de ψ à X_0 est régulière le long des flots $\exp(sF_i)$.

Par ailleurs on a le lemme suivant que nous prouverons plus loin.

Lemme 4.9. *Il existe $C > 0$, $\alpha > 0$ et un ensemble de mesure 1 X_1 tels que pour tout $x \in X_1$ pour tout $r < \alpha$, pour presque tout $y \in B(x, \alpha)$, il existe une suite (i_1, \dots, i_N) d'éléments de $\{1, \dots, k\}$, un N -uplet $(t_1, \dots, t_N) \in [-C\sqrt{d(x, y)}, C\sqrt{d(x, y)}]^N$ tel que*

$$\begin{aligned} x & \in X_0 \\ \exp(t_N X_{i_N})x & \in X_0 \\ \exp(t_{N-1} X_{i_{N-1}}) \exp(t_N X_{i_N})x & \in X_0 \\ & \vdots \\ y = \exp(t_1 X_{i_1}) \dots \exp(t_N X_{i_N})x & \in X_0 \end{aligned}$$

Soit x un élément de X_1 . Pour presque tous les points y de $B(x, \alpha)$ il existe $(t_1, \dots, t_N) \in [-C\sqrt{d(x, y)}, C\sqrt{d(x, y)}]^N$ satisfaisant la propriété décrite dans le lemme. Il existe L tel que l'on ait

$$\begin{aligned} & |\psi(x) - \psi(y)| \\ & \leq \sum_{k=1}^{N-1} |\psi(\exp(t_k F_{i_k}) \dots \exp(t_N F_{i_N})x) - \psi(\exp(t_{k+1} F_{i_{k+1}}) \dots \exp(t_N F_{i_N})x)| \\ & \leq \sum_{k=1}^{N-1} R'' |d(\exp(t_k F_{i_k}) \dots \exp(t_N F_{i_N})x, \exp(t_{k+1} F_{i_{k+1}}) \dots \exp(t_N F_{i_N})x)|^\beta \\ & \leq L' d(x, y)^{\beta/2} \end{aligned}$$

Par récurrence on construit une suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dense dans T^1S telle que, pour tout n , y_n appartient à X_1 et pour tout $k \leq n$ tel que $y_n \in B(y_k, \alpha)$ on ait $|\psi(y_n) - \psi(y_k)| \leq Ld(y_n, y_k)^{\beta/2}$. La restriction de ψ à l'ensemble $\{y_n/n \geq 0\}$ est höldérienne. Elle se prolonge en une fonction höldérienne. Pour presque tout point y , pour tout n tel que $y_n \in B(y, \alpha)$, on a $|\psi(y_n) - \psi(y)| \leq Ld(y_n, y)^{\beta/2}$. En un tel point y la fonction ψ coïncide nécessairement avec le prolongement höldérien de $\psi|_{\{y_n/n \geq 0\}}$. Finalement ψ coïncide presque partout avec une fonction höldérienne.

□

Démonstration. (du lemme précédent) Fixons un réel positif r inférieur à a . On montre en utilisant le théorème de Fubini qu'il existe un ensemble $X_1 \subset X_0$ de mesure pleine tel que, pour tout $x \in X_1$, $\exp(tF_{i_N})x$ appartient à X_0 pour presque tout $t \in [-C\sqrt{r}, C\sqrt{r}]$. De la même façon il existe un ensemble $X_2 \subset X_1$ de mesure pleine tel que $\exp(tF_{i_{N-1}})x$ appartient à X_1 pour presque tout $t \in [-C\sqrt{r}, C\sqrt{r}]$. On continue jusqu'à obtenir $X_N \subset X_{N-1}$ un ensemble de mesure pleine tel que, pour tout $x \in X_{N-1}$, pour presque tout $(t_1, \dots, t_N) \in [-C\sqrt{r}, C\sqrt{r}]^N$ l'application

$$\Phi : (t_1, \dots, t_N) \mapsto \exp(t_1 F_{i_1}) \dots \exp(t_N F_{i_N})$$

contient $B_0(Id, r)$. Grâce au théorème de Sard on sait que l'ensemble des points en lesquels la dérivée de Φ n'est pas de rang maximum a une image négligeable. Comme Φ est localement conjuguée à une application linéaire surjective en un point où la dérivée est surjective, l'image d'un sous-ensemble de mesure pleine de $[-C\sqrt{r}, C\sqrt{r}]^N$ contient un sous-ensemble de mesure pleine de $B_0(Id, r)$. On en déduit que, pour tout entier k , pour presque tous les points de $B_0(Id, 2^{-k}a) \setminus B_0(Id, 2^{-k-1}a)$ il existe

$$(t_1, \dots, t_N) \in [-C2^{-k-1}a, C2^{-k-1}a]^N \subset [C\sqrt{d(x, y)}, C\sqrt{d(x, y)}]^N$$

tel que l'on ait la propriété énoncée dans le lemme. Le lemme se déduit alors de l'égalité $B_0(x, a) = \cup_k B_0(Id, 2^{-k}a) \setminus B_0(Id, 2^{-k-1}a)$. □

4.3. Exemple 6 : le flot géodésique en dimension d , en courbure constante dans le cas géométriquement fini de volume fini. Soit X une variété hyperbolique connexe (de courbure constante) géométriquement finie. On peut décrire X de la façon suivante : il existe une partie compacte X_0 de X telle que $X \setminus X_0$ est une union finie de pointes. Dans le modèle du demi-espace de l'espace hyperbolique, une pointe est décrite sous la forme $]c, +\infty[\times F$ où F est une partie compacte subset de \mathbb{R}^{d-1} .

La technique précédente fonctionne encore dans cette situation. Mais bien sûr il n'est plus vrai ici que tous les « grands cubes stables » sont bien répartis dans X . Il existe des horicycles périodiques de longueur arbitrairement petite. Mais il se trouve que les horicycles très longs sont bien répartis dans la surface modulaire. La décroissance exponentielle des corrélations est encore valable en volume fini. Le raisonnement utilisé dans le cas compact peut-être adapté. Ce que montrent nos calculs est que si F définit un (F, ϵ) -cube en \bar{x} alors

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{m_s(T^{-n}FT^n)} \int_{T^{-n}FT^n} \varphi(\theta^{-n}T^{-n}\bar{x}) d\theta^{-n} \right| \\ & \leq C \left(\frac{\bar{\mu}(\partial U(\rho^{-n})) + \zeta^{-n} \rho^{2C''_0 n} + \rho^{-np}}{\epsilon^D} + \epsilon \right). \end{aligned}$$

Rappelons que F définit un (F, ϵ) -cube en \bar{x} si

$$(v, t, w) \mapsto \theta_v^+ g_t \theta_w^- \bar{x}$$

est un difféomorphisme sur son image dans G/Γ , noté $U_{\bar{x}}^{F, \epsilon}$.

Nous définissons la partition \mathcal{Q}_0^∞ comme dans le cas compact mais en à partir d'un recouvrement dénombrable par des (F, ϵ) -cubes aussi grands que possible. Nous adaptions la taille à la hauteur dans la pointe : les diamètres des cubes sont d'ordre e^{-n} à la hauteur e^n .

En raison des pointes la taille de l'ensemble des points à distance inférieure à ϵ des bords est différente :

$$\bar{\mu}\{\bar{x} \in G/\Gamma : \Delta_s(\epsilon)\bar{x} \cap \partial\mathcal{Q}(\bar{x}) \neq \emptyset\} \leq C\epsilon \ln \epsilon^{-1}.$$

Cela change un peu l'estimation de la mesure de ${}^cW_n^{\delta, \beta}$:

Lemme 4.10. *Il existe $C > 0$ et $q > 0$ tels que*

$$\bar{\mu}({}^cW_n^{\delta, \beta}) \leq Cn\beta^{-n}.$$

Mais les calculs sont similaires et conduisent à la même conclusion.

4.4. Exemple 7 : les flots sur les quotients compacts de $SL(d, \mathbb{R})$. Notons G le groupe $SL(d, \mathbb{R})$ et Γ le sous-groupe $SL(d, \mathbb{Z})$. L'espace quotient G/Γ a une structure de variété différentiable. La mesure de Haar sur G , μ , donne une mesure finie sur G/Γ invariante par translation à gauche que nous noterons $\bar{\mu}$ et supposons normalisée ($\bar{\mu}(G/\Gamma) = 1$).

Nous désignerons par \bar{x} la classe à gauche modulo Γ de l'élément x de G .

Soient $(T_i)_{i=1}^d$ une suite décroissante de d nombres positifs non tous égaux à 1 dont le produit vaut un. Appelons T la matrice

$$T = \begin{pmatrix} T_1 & & & & \\ & T_2 & & & 0 \\ & & \ddots & & \\ & & & T_{d-1} & \\ & 0 & & & T_d \end{pmatrix}.$$

Le groupe à un paramètre

$$\{T^t = \begin{pmatrix} T_1^t & & & & \\ & T_2^t & & & 0 \\ & & \ddots & & \\ & & & T_{d-1}^t & \\ & 0 & & & T_d^t \end{pmatrix} / t \in \mathbb{R}\}$$

définit sur G/Γ un flot, noté encore T^t , préservant la mesure $\bar{\mu}$

$$T^t : G/\Gamma \longrightarrow G/\Gamma : \bar{x} \longmapsto T^t\bar{x}.$$

Le système dynamique $(G/\Gamma, T^t, \bar{\mu})$ est mélangeant (cf. [5]) donc pour toute fonction f intégrable sur G/Γ , pour presque tout $\bar{x} \in G/\Gamma$, on a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t f(T^s\bar{x}) ds = \int_{G/\Gamma} f(\bar{y}) d\bar{\mu}(\bar{y}).$$

Soit f une fonction de carré intégrable d'intégrale nulle. Sa variance, sous l'action du flot, peut être définie comme la limite, si elle existe

$$\tilde{\sigma}^2(f) = \lim_n \frac{1}{N} \left\| \int_0^N f(T^s \cdot) ds \right\|_2.$$

Sous la condition

$$\int_0^\infty |\langle T^s f, f \rangle| ds < \infty,$$

la variance existe et est égale à :

$$\tilde{\sigma}^2(f) = 2 \int_0^\infty \langle T^s f, f \rangle ds.$$

La relation

$$(TxT^{-1})_{ij} = \frac{T_i x_{ij}}{T_j}$$

permet d'identifier les variétés stables, instables et neutres du difféomorphisme T . Considérons la partition de $\{1, \dots, d\}$ en les ensembles J_k définis par :

- pour tout k , pour tout i, j appartenant à J_k , on a $T_i = T_j$,
- pour tout k, n tels que $k < n$, pour tout i appartenant à J_k , tout j appartenant à J_n , on a $T_i > T_j$.

Désignons par $h_{J_i J_j}$ une matrice indexée par l'ensemble $J_i \times J_j$, par Id_{J_i} la matrice identité indexée par J_i . Les variétés stables, instables et neutres de T sont données par les orbites de groupes de matrices triangulaires ou diagonales par blocs.

La variété instable passant par $\bar{x} = x\Gamma$ est la variété immergée $H_u x\Gamma$ définie par le groupe H_u des matrices de la forme

$$h_u = \begin{pmatrix} Id_{J_1} & h_{J_1 J_2} & \dots & h_{J_1 J_{l-1}} & h_{J_1 J_l} \\ 0 & Id_{J_2} & \dots & h_{J_2 J_{l-1}} & h_{J_2 J_l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & Id_{J_{l-1}} & h_{J_{l-1} J_l} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & Id_{J_l} \end{pmatrix}.$$

La variété stable passant par $\bar{x} = x\Gamma$ est la variété immergée $H_s x\Gamma$ définie par le groupe H_s des matrices de la forme

$$h_s = \begin{pmatrix} Id_{J_1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ h_{J_2 J_1} & Id_{J_2} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ h_{J_{l-1} J_1} & h_{J_{l-1} J_2} & \dots & Id_{J_{l-1}} & 0 \\ h_{J_l J_1} & h_{J_l J_2} & \dots & h_{J_l J_{l-1}} & Id_{J_l} \end{pmatrix}.$$

La variété neutre passant par $\bar{x} = x\Gamma$ est la variété immergée $H_e x\Gamma$ définie par le groupe H_e des matrices de la forme

$$h_e = \begin{pmatrix} h_{J_1 J_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & h_{J_2 J_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & h_{J_l J_l} \end{pmatrix}.$$

Prenons deux exemples.

Si la suite (T_i) est strictement décroissante alors les groupes H_u , H_s et H_e sont respectivement les groupes des matrices unipotentes triangulaires supérieures, des matrices unipotentes triangulaires inférieures et des matrices diagonales de déterminant 1.

Si $T_1 > T_2 = T_3 = \dots = T_d$ alors les variétés neutres sont les orbites de l'action du groupe des matrices de la forme

$$h_e = \begin{pmatrix} h_{11} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & h_{22} & \dots & h_{2(l-1)} & h_{2d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & h_{(d-1)2} & \dots & h_{(d-1)(d-1)} & h_{(d-1)d} \\ 0 & h_{d2} & \dots & h_{d(d-1)} & h_{dd} \end{pmatrix}.$$

La dimension de ces variétés est $d^2 - 2d + 1$.

Dans tous les cas la dimension des feuilles neutres est supérieure ou égale à $d - 1$. Lorsque $d \geq 3$ la transformation T^t n'est donc pas un flot d'Anosov.

Appelons E_{ij} les éléments de la base canonique de $M(d, \mathbb{R})$. L'ensemble $B_u = \{E_{ij} / i \in J_k, j \in J_l, k > l\}$ forme une base de l'algèbre de Lie du groupe nilpotent H_u . Appelons d_u son cardinal et notons $(Y_{u,1}, \dots, Y_{u,d_u})$ ses éléments par commodité. On définit de même $(Y_{e,1}, \dots, Y_{e,d_e})$ et $(Y_{s,1}, \dots, Y_{s,d_s})$ des bases des algèbres de Lie de H_e et H_s ($d_s = d_u$, $(Y_{e,1}, \dots, Y_{e,d_e})$ contient des éléments de la forme $E_{ii} - E_{jj}$). Soit $D = d^2 - 1$ la dimension de $SL(d, \mathbb{R})$. L'application

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R}^D &= \mathbb{R}^{d_s+d_e+d_u} \longrightarrow G \\ &(t_{s,1}, \dots, t_{s,d_s}, t_{e,1}, \dots, t_{e,d_e}, t_{u,1}, \dots, t_{u,d_u}) \\ &\longmapsto \exp\left(\sum_1^{d_u} t_{u,i} Y_{u,i}\right) \exp\left(\sum_1^{d_e} t_{e,i} Y_{e,i}\right) \exp\left(\sum_1^{d_s} t_{s,i} Y_{s,i}\right) \end{aligned}$$

est un difféomorphisme d'un voisinage de 0 sur un voisinage de l'identité.

Notons $\Delta(r)$ l'ensemble $\{g \in SL(d, \mathbb{R}) / \exists h \in M(d, \mathbb{R}), \|h\|_\infty \leq r, g = Id + h\}$, $B_0(x, r)$ (resp. $B(\bar{x}, r)$) la boule de centre x (resp. \bar{x}) et de rayon r pour la distance d_0 (resp. d). On montre l'existence de constantes C_0 et r_0 , telles que, pour $r \leq r_0$, on ait :

$$\Delta(C_0^{-2}r) \subset \Phi([\cdot - C_0^{-1}r, C_0^{-1}r]^D) \subset B_0(Id, r) \subset \Phi([\cdot - C_0r, C_0r]^D) \subset \Delta(C_0^2r) \quad (\mathbf{I}).$$

Nous ferons fréquemment référence à cette suite d'inclusions.

Nous noterons m_s, m_u, m_e les mesures de Haar sur H_s, H_u, H_e . Il existe une fonction multiplicative Θ_e définie sur H_e telle que, pour toute fonction φ à continue à support dans $B_0(Id, r_0)$,

$$\int_G \varphi(g) d\mu(g) = \int_{H_s \times H_e \times H_u} \varphi(h_s h_e h_u) \Theta_e(h_e) dh_s dh_e dh_u.$$

7) Rayon d'injectivité

Désignons par π la projection canonique de G sur G/Γ . On remarque que si la restriction de π à $B_0(x, r)$ est bijective alors on peut identifier isométriquement $B(\bar{x}, r)$ et $B_0(Id, r)$. Appelons rayon d'injectivité de G/Γ en \bar{x} le rayon r maximal pour lequel cette identification est possible. La variété G/Γ n'est pas compacte. Le rayon d'injectivité peut prendre des valeurs arbitrairement petites.

Lemme 4.11. *Soit un "parallépipède" de volume 1 dont les arêtes sont de normes inférieures à L . Il existe une constante $c > 0$ telle que :*

- a) toutes les arêtes soient de normes supérieures à c/L^{d-1} ,
- b) l'une des arêtes forme avec les faces qui ne la contiennent pas un angle α tel que $\sin \alpha \geq c/L^d$,
- c) le parallépipède contienne une boule de rayon c/L^{2d-1} .

Soit \mathcal{D} un domaine fondamental inclus dans l'ensemble de Siegel $\mathcal{S}_{2/\sqrt{3}, 1/2}$. Pour tout entier positif k notons E_k l'ensemble $\{x \in G / \|x\|_\infty \in [e^{k-1}, e^k]\}$. Un calcul d'intégrale montre qu'il existe une constante $c_1 > 0$ telle que $E_k \cap \mathcal{D}$ est de μ -mesure inférieure à $e^{-c_1 k}$.

Proposition 4.12. *Il existe c_0 tel que, pour tout k et tout x appartenant à $\mathcal{D} \cap E_k$, la projection canonique*

$$\pi : G \longrightarrow G/\Gamma : x \longmapsto x\Gamma = \bar{x}$$

est un difféomorphisme de $\Phi[\] - c_0 e^{-k/c_0}, c_0 e^{-k/c_0} [^D] x$ sur son image.

Démonstration. Soient x un élément de $E_k \cap \mathcal{D}$ et γ un élément de Γ différent de l'identité. Les vecteurs lignes de x sont de normes inférieures à e^k et forment un parallépipède de volume 1 ($x \in SL(d, \mathbb{R})$). On peut donc affirmer (lemme I.4 a) et b)) que l'un au moins des vecteurs lignes de x :

- est de norme supérieure à $ce^{-k(d-1)}$,
- forme avec l'orthogonal un angle α tel que $\sin \alpha \geq ce^{-kd}$.

Comme les coefficients de $x(\gamma - Id)$ sont les produits scalaires des vecteurs lignes de x par les vecteurs colonnes de $\gamma - Id \neq 0$ on en déduit :

$$\|x(\gamma - Id)\|_\infty \geq ce^{-(2d-1)k}.$$

Cela signifie que $x + \{y / \|y\|_\infty < ce^{-(2d-1)k}\} = (Id + \{yx^{-1} / \|y\|_\infty \leq ce^{-(2d-1)k}\})x$ ne contient aucun élément de $x\Gamma$ autre que x . Grâce au lemme I.4 (c), comme $\|x^{-1}\|_\infty$ est inférieur à $d!e^{dk}$, on montre qu'il existe une constante $c_2 > 0$ telle que l'ensemble $(Id + \{yx^{-1} / \|y\|_\infty < ce^{-(2d-1)k}\})$ contienne $\Delta(c_2 e^{-(d(2d-1)+2d-1)k})$. On déduit alors le résultat des inclusions (I).

□

Mélange

Soient φ et ψ deux fonctions indéfiniment dérivables sur G/Γ de moyennes nulles. Grâce à la théorie des représentations des groupes de Lie, nous allons donner une majoration du produit scalaire $\langle T^n \varphi, \psi \rangle$. Nous ne donnerons pas de détail, nous

contenant d'indiquer comment les résultats classiques ([4],[23]) s'appliquent. Nous reprenons un raisonnement trouvé dans [16].

Soit A^+ l'ensemble des matrices diagonales de déterminant un dont les coefficients diagonaux a_i sont positifs et forment une suite décroissante. Soit Ξ la fonction de Harish-Chandra, équivalente à $4\pi \log a/a$ en l'infini, définie par :

$$\Xi(a) = \int_0^{2\pi} \left| \frac{\cos^2 \theta}{a^4} + \sin^2 \theta \right|^{-1/2} d\theta.$$

Soit λ un élément de A^+ . Notons $\Psi(\lambda)$ la quantité

$$\Psi(\lambda) = \min_{i \neq j} \Xi(\sqrt{a_i/a_j}).$$

On trouvera le théorème suivant dans le livre de Howe et Tan ([15] page 215).

Théorème 4.13. *Soit λ un élément de A^+ . Soit K un sous-groupe compact maximal de $SL(d, \mathbb{R})$. Soit U une représentation unitaire de $SL(d, \mathbb{R})$ ($d \geq 3$) sans vecteur invariant. Alors, si u et v sont deux vecteurs K -finis, on a*

$$|\langle u, U(\lambda)v \rangle| \leq \|u\| \|v\| (\dim \text{Vect}Ku \dim \text{Vect}Kv)^{1/2} \Psi(\lambda).$$

Comme dans le cas de $PSO(1, d)$, on en déduit le théorème suivant :

Théorème 4.14. *Soient v et w deux vecteurs indéfiniment dérivables d'une représentation U sans vecteur invariant. Il existe des constantes $C > 0$ et m telles que*

$$|\langle U(\lambda)v, w \rangle| \leq C \Psi(\lambda) \|\Omega^m v\| \|\Omega^m w\|.$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} |\langle U(\lambda)v, w \rangle| &= \left| \langle \sum_{\delta \in \hat{K}} U(\lambda)P(\delta)v, \sum_{\zeta \in \hat{K}} P(\zeta)w \rangle \right| \\ &\leq C \Psi(\lambda) \sum_{\delta \in \hat{K}, \zeta \in \hat{K}} \|P(\zeta)w\| \|P(\delta)v\| d(\delta)d(\zeta) \\ &\leq C \Psi(\lambda) \|\Omega^m v\| \|\Omega^m w\| \sum_{\delta \in \hat{K}, \zeta \in \hat{K}} d(\delta)d(\zeta)c(\delta)^{-m}c(\zeta)^{-m} \\ &\leq C \Psi(\lambda) \|\Omega^m v\| \|\Omega^m w\| \left(\sum_{\delta \in \hat{K}} d(\delta)c(\delta)^{-m} \right)^2. \end{aligned}$$

□

Corollaire 4.15. *Soient v et w deux fonctions indéfiniment dérivables définies sur G/Γ d'intégrales nulles. Il existe $\zeta > 1$, $C'_0 > 0$ et un entier m tel que*

$$|\langle T^n v, w \rangle| \leq C'_0 \|\Omega^m v\| \|\Omega^m w\| \zeta^{-|n|} \quad (\mathbf{M}).$$

Démonstration. Le théorème précédent s'applique à la représentation régulière sur l'espace $L^2_0(SL(d, \mathbb{R})/SL(d, \mathbb{Z}))$ (qui n'a pas de vecteur invariant). □

Appelons $\Delta_u(r)$ l'ensemble des matrices unipotentes appartenant à H_u dont les coefficients non diagonaux sont de valeurs absolues inférieures à r .

Fixons $\epsilon > 0$ et considérons un ensemble $F \subset H_u$ contenant la “boule” $\Delta_u(\epsilon)$. Désignons par $B_s(Id, \epsilon)$ (resp. $B_e(Id, \epsilon)$) l’ensemble $H_s \cap B_0(Id, \epsilon)$ (resp. $H_e \cap B_0(Id, \epsilon)$).

Notons \mathcal{U}_n l’ensemble $T^n B_s(Id, \epsilon) T^{-n} \times T^n B_e(Id, \epsilon) T^{-n} \times T^n F T^{-n} \subset H_s \times H_e \times H_u$. Si l’application

$$\mathcal{U}_0 \longrightarrow G : (h_s, h_e, h_u) \longmapsto h_s h_e h_u \bar{x}$$

est un difféomorphisme sur son image, notée $U_{\bar{x}}^{F, \epsilon}$, nous dirons que F définit un (F, ϵ) -pavé en \bar{x} .

Proposition 4.16. *Soit φ une fonction appartenant à la classe \mathcal{C} . Pour tout $\rho > 1$, $n \geq 1$, $\epsilon > 0$, $F \subset H_u$ contenant $\Delta_u(\epsilon)$, toute ρ -identité approchée (χ_n) et tout \bar{x} tels que $U = U_{\bar{x}}^{F, \epsilon}$ soit un (F, ϵ) -pavé, il existe C_0'' et p tels qu’on ait l’inégalité :*

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{m_u(T^n F T^{-n})} \int_{T^n F T^{-n}} \varphi_{[\frac{n-1}{M}]}(h_u T^n \bar{x}) dh_u \right| \\ & \leq C_0''' \left(\frac{\bar{\mu}(\partial U(\rho^{-n})) + \zeta^{-n} \rho^{2C_0''n}}{\epsilon^D} + \rho^{\frac{C_0''n}{M}} \epsilon^p \right). \end{aligned}$$

La constante ζ est celle que nous avons introduite au corollaire I.8. Les fonctions φ_k sont les convolées de φ avec les fonctions χ_k et la constante p est la constante intervenant dans la définition de la classe \mathcal{C} (voir l’introduction).

La filtration. Comme dans le cas $d = 2$ traité dans [9], nous construisons la filtration $(\mathcal{A}_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ permettant d’appliquer le théorème II.1 à partir d’un recouvrement \mathcal{R} . Il nous faut imposer quelques conditions à \mathcal{R} . Rappelons que E_k désigne l’ensemble des matrices dont la norme infinie est comprise entre e^{k-1} et e^k . La constante c_0 a été introduite à la proposition I.5 la constante r_0 au paragraphe I.5 (Coordonnées locales).

Lemme 4.17. *Il existe $C > 0$ tel que pour tout k on puisse recouvrir $E_k \cap \mathcal{D}$ par au plus e^{Ck} ensembles de la forme $\Phi(\cdot) - c_0 e^{-k/c_0}, c_0 e^{-k/c_0} [^D] x$.*

Démonstration. Soit x une matrice appartenant à $E_k \cap \mathcal{D}$. Dans $GL(d, \mathbb{R})$, l’ensemble $\Delta(C_0^{-1} c_0 e^{-k/c_0}) x$ est un parallépipède de volume $(C_0^{-1} c_0)^{d^2} e^{-kd^2/c_0}$ contenu dans une boule de rayon e^{k+1} . Il contient donc (lemme I.3) une boule de rayon $ce^{-k/c'}$ où c' est une constante indépendante de k . L’ensemble $E_k \cap \mathcal{D}$ est inclus dans l’ensemble des matrices ayant des coefficients inférieurs à e^k qui s’identifie à l’hypercube de côtés e^k dans \mathbb{R}^{d^2} . Cet hypercube est la réunion de $(1/c)^{d^2} e^{(1+1/c')d^2 k}$ hypercubes de côté $ce^{-k/c'}$. L’énoncé du lemme en découle (on utilise encore une fois les inclusions (I)). \square

Choisissons un recouvrement \mathcal{R} de G/Γ infini dénombrable vérifiant, pour certaines constantes positives C_1 et C_2 , les conditions suivantes :

(R1) Le recouvrement est décrit par une famille $(x_i, \epsilon_i)_{i \in \mathbb{N}} \in (G \times \mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$:

$$\mathcal{R} = \{ \Phi(\cdot) - \epsilon_i, \epsilon_i [^D] \bar{x}_i : i \in \mathbb{N} \}.$$

(R2) Pour tout i , l’application

$$] - C_1 \epsilon_i, C_1 \epsilon_i [^D \rightarrow G/\Gamma : v \mapsto \Phi(v) \bar{x}_i$$

est un difféomorphisme de $] - C_1\epsilon_i, C_1\epsilon_i[^D$ sur son image.

(R3) Pour tout i , les éléments de \mathcal{R} dont l'intersection avec $\Phi(] - \epsilon_i, \epsilon_i[^D)\bar{x}_i$ est non vide sont tous inclus dans $\Phi(] - C_1\epsilon_i, C_1\epsilon_i[^D)\bar{x}_i$.

(R4) Le nombre d'ensembles appartenant à \mathcal{R} dont l'intersection avec \overline{E}_k n'est pas vide est inférieur à e^{C_2k} .

(R5) Pour tout i , $\epsilon_i \leq \min(\|x_i\|_\infty^{-C_1}, r_0)$.

La construction d'un tel recouvrement peut se mener de la manière suivante. Il existe une constante C telle que, pour tout $\gamma \in \Gamma$, pour tout $x \in G$, on ait

$$(C\|\gamma\|)^{-1}\|x\gamma\| \leq \|x\| \leq C\|\gamma\|\|x\gamma\| \quad (*).$$

Pour tout $k \geq 0$, on recouvre $E_k \cap \mathcal{D}$ par au plus e^{Ck} ensemble de la forme $\Phi(] - c_0e^{-k/c_0}, c_0e^{-k/c_0}[^D)x$ de telle sorte que la réunion des ensembles considérés soit incluse dans un domaine de Siegel $\mathcal{S}_{t,u}$ (lemme III.1). Au domaine $\mathcal{S}_{t,u}$ nous avons associé dans le théorème I.2 l'ensemble fini $\mathcal{F}_{t,u}$ inclus dans Γ . Grâce à l'encadrement (*) on sait qu'il existe un nombre C' tel que si x appartient à E_k alors, pour tout γ appartenant à $\mathcal{F}_{t,u}$, $x\gamma$ appartient à $\cup_{j=-C'}^{C'} E_{k+j}$. Notons C_1 la constante $C_0^2(1 + 2e^{C'/c_0})$. L'application $] - c_0e^{-k/c_0}, c_0e^{-k/c_0}[^D \rightarrow G/\Gamma : v \mapsto \Phi(v)\bar{x}$ est un difféomorphisme de $] - c_0e^{-k/c_0}, c_0e^{-k/c_0}[^D$ sur son image (proposition I.5). On peut recouvrir chaque ensemble $\Phi(] - c_0e^{-k/c_0}, c_0e^{-k/c_0}[^D)x$ par un nombre fini d'ensembles de la forme $\Phi(]C_1^{-1}c_0e^{-k/c_0}, C_1^{-1}c_0e^{-k/c_0}[^D)x_i$ de manière à avoir la propriété **R2**.

Si y est un point appartenant à $\Phi(] - \epsilon_i, \epsilon_i[^D)\bar{x}_i \cap \Phi(] - \epsilon_j, \epsilon_j[^D)\bar{x}_j$ alors la distance $d(\bar{x}_i, \bar{x}_j)$ est inférieure à $C_0(\epsilon_i + \epsilon_j)$ (inclusions (I)) et $\Phi(] - \epsilon_j, \epsilon_j[^D)\bar{x}_j \subset B_0(Id, C_0(\epsilon_i + 2\epsilon_j))\bar{x}_i \subset \Phi(] - C_0^2(\epsilon_i + 2\epsilon_j), C_0^2(\epsilon_i + 2\epsilon_j)[^D)\bar{x}_i$. La propriété **R3** en découle car on peut majorer uniformément ϵ_j/ϵ_i par e^{C'/c_0} . En effet $\Phi(] - \epsilon_i, \epsilon_i[^D)\bar{x}_i \cap \Phi(] - \epsilon_j, \epsilon_j[^D)\bar{x}_j$ ne peut être non-vide que s'il existe $\gamma \in \mathcal{F}_{t,u}$ tel que $x_j\gamma$ appartienne à $(E_{k-1} \cup E_k \cup E_{k+1}) \cap \mathcal{S}_{t,u}$ (théorème I.2) et donc ϵ_j/ϵ_i est inférieur à e^{C'/c_0} .

L'intersection d'un ensemble $\Phi(] - \epsilon_i, \epsilon_i[^D)\bar{x}_i$ avec la projection canonique de E_k n'est non vide que si x_i appartient à $\cup_{j=-C'}^{C'} E_{k+j}$. On en déduit que la propriété **R4** est vérifiée avec C_2 une constante dépendant de C' , C et C_1 . La propriété **R5** ne pose pas de problème.

Soit \bar{x} dans G/Γ , notons $\epsilon_{\bar{x}}$ le plus grand des ϵ_i tels que \bar{x} appartienne à $\Phi(] - \epsilon_i, \epsilon_i[^D)\bar{x}_i$. Il existe un entier i tel que $\epsilon_{\bar{x}} = \epsilon_i$ et \bar{x} soit l'image par π d'un point x de G appartenant à $\Phi(] - \epsilon_i, \epsilon_i[^D)x_i$. Comme (propriété **(R5)**) $\epsilon_i \leq \|x_i\|_\infty^{-C_1}$, on montre en utilisant les inclusions (I) que $\epsilon_{\bar{x}} \leq (1 + C_0r_0)\|x\|_\infty^{-C_1}$.

Définissons la partition \mathcal{Q} de G/Γ de la façon suivante :

$$\mathcal{Q} = \{\cap_{R \in \mathcal{R}} A_R / A_R = R \text{ ou } {}^c R\},$$

puis la partition \mathcal{P} par

$$\mathcal{P}(\bar{x}) = \mathcal{Q}(\bar{x}) \cap \Delta_u(C_1\epsilon_{\bar{x}})\bar{x},$$

enfin

$$\mathcal{P}_0^\infty(\bar{x}) = \mathcal{P}(\bar{x}) \cap T\mathcal{P}(T^{-1}\bar{x}) \cap T^2\mathcal{P}(T^{-2}\bar{x}) \cap \dots$$

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ appelons \mathcal{A}_n la tribu dont les atomes sont les éléments de $T^{-n}\mathcal{P}_0^\infty$. L'atomes de \mathcal{A}_n contenant \bar{x} est

$$\mathcal{A}_n(\bar{x}) = T^{-n}\mathcal{P}(T^n\bar{x}) \cap T^{-(n-1)}\mathcal{P}(T^{n-1}\bar{x}) \cap T^{-(n-2)}\mathcal{P}(T^{n-2}\bar{x}) \cap \dots = T^{-n}\mathcal{A}_0(T^n\bar{x}).$$

L'égalité $\mathcal{A}_0(\bar{x}) = \mathcal{P}(\bar{x}) \cap \mathcal{A}_{-1}(\bar{x})$ montre que les atomes de \mathcal{A}_{-1} sont des réunions finies d'atomes de \mathcal{A}_0 . La famille $(\mathcal{A}_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ vérifie donc la condition $\mathcal{A}_n \subset T^{-1}\mathcal{A}_n = \mathcal{A}_{n+1}$.

Définissons l'ensemble $W_n^{\delta, \beta}$ par $(\delta, \beta \in]1, \infty[)$

$$W_n^{\delta, \beta} = \{\bar{x} \in G/\Gamma / \forall k \geq 0 \Delta_u(\beta^n \delta^{-k})T^{-k}\bar{x} \subset \mathcal{Q}(T^{-k}\bar{x})\}.$$

Si \bar{x} appartient à $W_n^{\delta, \beta}$ en particulier on a l'inclusion $\Delta_u(\beta^n)\bar{x} \subset \mathcal{R}(\bar{x})$, donc $\epsilon_{\bar{x}} \geq \beta^n$. Le point \bar{x} est donc l'image par π (la projection sur G/Γ) d'un point x de G de norme $\|\cdot\|_\infty$ inférieure à $(1 + C_0 r_0)\beta^{n/C_1}$.

Le groupe H_u est dilaté par la transformation T : il existe $\xi > 1$ tel que, pour tout $r > 0$, l'ensemble $T\Delta_u(r)T^{-1}$ contienne l'ensemble $\Delta_u(\xi r)$. On en déduit le lemme suivant.

Lemme 4.18. *Si $\delta < \xi$ alors, pour \bar{x} appartenant à $W_n^{\delta, \beta}$, on a l'inclusion*

$$\Delta_u(\beta^n)\bar{x} \subset \mathcal{P}_0^\infty(\bar{x}).$$

Démonstration. Soit \bar{x} un élément de $W_n^{\delta, \beta}$. Par définition, pour tout entier $k \geq 0$, on a

$$\Delta_u(\beta^n \delta^{-k})T^{-k}\bar{x} \subset \mathcal{P}(T^{-k}\bar{x}),$$

donc

$$\Delta_u(\beta^n \delta^{-k} \xi^k)\bar{x} \subset T^k \Delta_u(\beta^n \delta^{-k})T^{-k}\bar{x} \subset T^k \mathcal{P}(T^{-k}\bar{x}).$$

Si $\delta < \xi$, on obtient l'inclusion annoncée :

$$\Delta_u(\beta^n)\bar{x} \subset \bigcap_{k \geq 0} T^k \mathcal{P}(T^{-k}\bar{x}) = \mathcal{P}_0^\infty(\bar{x}).$$

□

Lemme 4.19. *Il existe $C_3 > 0$ et $q > 0$ tels que, pour tout $\epsilon > 0$, on ait*

$$\bar{\mu}\{\bar{x} \in G/\Gamma : \Delta_u(\epsilon)\bar{x} \cap \partial\mathcal{Q}(\bar{x}) \neq \emptyset\} \leq C_3 \epsilon^q.$$

Démonstration. L'ensemble $\overline{E_k}$ est recouvert par la réunion d'au plus $e^{C_2 k}$ pavés de la forme $\Phi(\cdot - \epsilon_i, \epsilon_i] x_i$. On a donc

$$\bar{\mu}\{\bar{x} \in \overline{E_k} : \Delta_u(\epsilon)\bar{x} \cap \partial\mathcal{Q}(\bar{x}) \neq \emptyset\} \leq e^{C_2 k} \epsilon.$$

On a vu (paragraphe I.7) que pour tout k , on a $\bar{\mu}(\overline{E_k}) \leq e^{-c_1 k}$. On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} & \bar{\mu}\{\bar{x} \in G/\Gamma : \Delta_u(\epsilon)\bar{x} \cap \partial\mathcal{Q}(\bar{x}) \neq \emptyset\} \\ & \leq \sum_0^L \bar{\mu}\{\bar{x} \in \overline{E_k} : \Delta_u(\epsilon)\bar{x} \cap \partial\mathcal{Q}(\bar{x}) \neq \emptyset\} + \bar{\mu}(\cup_{L+1}^\infty \overline{E_k}) \\ & \leq \sum_0^L e^{C_2 k} \epsilon + \sum_{L+1}^\infty e^{-c_1 k} \\ & \leq e^{L+1} \epsilon + e^{-c_1(L+1)} / (1 - e^{-c_1}). \end{aligned}$$

En choisissant L convenablement en fonction de ϵ on obtient le résultat. \square

Lemme 4.20. *Il existe $C_4 > 0$ et $q > 0$ tels que*

$$\bar{\mu}({}^c W_n^{\delta, \beta}) \leq C_4 \beta^{nq}.$$

Démonstration. C'est une conséquence de l'invariance de $\bar{\mu}$ par T et du lemme III.3 :

$$\begin{aligned} \bar{\mu}({}^c W_n^{\delta, \beta}) &= \bar{\mu}(\{\bar{x} \in G/\Gamma / \exists k \geq 0 \Delta_u(\beta^n \delta^{-k}) T^{-k} \bar{x} \cap \partial\mathcal{Q}(T^{-k} \bar{x}) \neq \emptyset\}) \\ &\leq \sum_{k=0}^\infty \bar{\mu}(\{\bar{x} \in G/\Gamma / \Delta_u(\beta^n \delta^{-k}) T^{-k} \bar{x} \cap \partial\mathcal{Q}(T^{-k} \bar{x}) \neq \emptyset\}) \\ &\leq \sum_{k=0}^\infty C_3 (\beta^n \delta^{-k})^q. \end{aligned}$$

\square

Pour montrer la bonne répartition des atomes de \mathcal{A}_n nous avons également besoin d'une information sur la régularité de leurs bords (il faut majorer le terme $\bar{\mu}(\partial U(\rho^{-n}))$ dans l'inégalité de la proposition II.1). La nilpotence du groupe H_u permet d'obtenir cette information par des arguments algébriques très simples.

Lemme 4.21. *Il existe un compact $K \subset \mathbb{R}^{d_u}$ tel que, pour tout k , pour tout $\bar{x} \in \overline{E_k}$, il existe un ensemble $E_{\bar{x}}$ inclus dans K dont le bord est constitué d'au plus $d^2 e^{C_2 k}$ morceaux de surfaces algébriques de degré d tel que l'on ait :*

$$\mathcal{P}(\bar{x}) = \exp(E_{\bar{x}}) \bar{x}.$$

Démonstration. Soit $\bar{x} \in G/\Gamma$. Un ensemble R étant donné, convenons que $\widetilde{R}(\bar{x})$ désigne R si \bar{x} appartient à R , son complémentaire sinon. La propriété **R4** du recouvrement \mathcal{R} assure qu'il existe un entier $l \leq e^{C_2 k}$ et une famille i_1, \dots, i_l tels que l'ensemble $\mathcal{Q}(\bar{x})$ soit défini par

$$\mathcal{Q}(\bar{x}) = \bigcap_{j=1}^l \widetilde{R(\bar{x}_{i_j})}.$$

La propriété **R3** entraîne que, pour tout $j = 1, \dots, l$, il existe $(t_{u,1}, \dots, t_{u,d_u}, \dots, t_{s,d_s})$ appartenant à $] - C_1 \epsilon_{i_j}, C_1 \epsilon_{i_j}[^D$ tels que

$$\bar{x} = \exp\left(\sum_{k=1}^{d_u} t_{u,k} Y_{u,k}\right) \exp\left(\sum_{k=1}^{d_e} t_{e,k} Y_{e,k}\right) \exp\left(\sum_{k=1}^{d_s} t_{s,k} Y_{s,k}\right) \bar{x}_{i_j}.$$

Considérons un d_u -uplet (v_1, \dots, v_{d_u}) . Comme H_u est nilpotent de degré d , il existe des polynômes $P_k^j(v)$ de degrés inférieurs ou égaux à d dont les coefficients dépendent de $(t_{u,1}, \dots, t_{u,d_u})$ tels que

$$\exp\left(\sum_{k=1}^{d_u} v_k Y_{u,k}\right) \bar{x} = \exp\left(\sum_{k=1}^{d_u} P_k(v) Y_{u,k}\right) \exp\left(\sum_{k=1}^{d_e} t_{e,k} Y_{e,k}\right) \exp\left(\sum_{k=1}^{d_s} t_{s,k} Y_{s,k}\right) \bar{x}_{i_j}.$$

Le point $\exp\left(\sum_{k=1}^{d_u} v_k Y_{u,k}\right) \bar{x}$ appartient à $\Phi(] - \epsilon_{i_j}, \epsilon_{i_j}[^D) \bar{x}_{i_j}$ si et seulement si, pour tout i , $P_i(v)$ appartient à $] - \epsilon_{i_j}, \epsilon_{i_j}[$. On en déduit que l'ensemble défini dans l'énoncé de la proposition est décrit par

$$E_{\bar{x}} = \{v \in] - C_1 \epsilon_{\bar{x}}, C_1 \epsilon_{\bar{x}}[^{d_u} / \forall (k, j) \in [1, d_u] \times [1, l], P_k^j(v) \in \text{ou } \notin] - \epsilon_{i_j}, \epsilon_{i_j}[\}.$$

□

Notons λ_u la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^{d_u} .

Lemme 4.22. *Soient K un compact de \mathbb{R}^{d_u} et ϵ un réel positif. Il existe une constante C_5 dépendant uniquement de K telle que, pour toute hypersurface algébrique $S \subset \mathbb{R}^{d_u}$ de degré inférieur ou égal à d , on ait*

$$\lambda_u\{x \in K / d(x, S) < \epsilon\} \leq C_5 \epsilon,$$

Lemme 4.23. *Il existe une constante $C_6 > 0$ telle que, si $\bar{x} \in W_n^{\delta, \beta}$ alors on a*

$$m_u\{\bar{y} \in \mathcal{P}_0^\infty(\bar{x}) / \Delta_u(\epsilon) \bar{x} \cap \partial \mathcal{P}_0^\infty(\bar{x}) \neq \emptyset\} < C_6 \beta^{-C_6 n} \epsilon.$$

Démonstration. Soit \bar{x} un élément de $W_n^{\delta, \beta}$. Par définition, pour tout entier $k \geq 0$, on a

$$\Delta_u(\beta^n \delta^{-k}) T^{-k} \bar{x} \subset \mathcal{P}(T^{-k} \bar{x}),$$

donc

$$\Delta_u(\beta^n \delta^{-k} \xi^k) \bar{x} \subset T^k \mathcal{P}(T^{-k} \bar{x}).$$

Par ailleurs on sait que $\mathcal{P}(\bar{x}) \subset \Delta_u(r_0) \bar{x}$, donc, si $\beta^n \delta^{-k} \xi^k > r_0$, l'ensemble $\mathcal{P}(\bar{x})$ est inclus dans $\Delta_u(\beta^n \delta^{-k} \xi^k) \bar{x}$. On en déduit que $\mathcal{P}_0^\infty(\bar{x})$ est égal à

$$\mathcal{P}_0^\infty(\bar{x}) = \bigcap_{k=0}^{[(\ln r_0 + n \ln \beta) / \ln(\xi/\delta)]} T^k \mathcal{P}(T^{-k} \bar{x}).$$

Comme on l'a vu un peu plus haut il existe un point x de G se projetant sur \bar{x} de norme inférieure à $(1 + C_0 r_0) \beta^{-n/C_1}$. Il existe donc une constante C' telle que, pour tout entier k compris entre 0 et $[(\ln r_0 - n \ln \beta) / \ln(\xi/\delta)]$, on ait $\|T^k x\|_\infty \leq e^{C' n \log \beta}$. Cela entraîne (propriété **R4**) que le bord de $\mathcal{P}_0^\infty(\bar{x})$ est constitué par au plus $d^2 [(\ln r_0 - n \ln \beta) / \ln(\xi/\delta)] e^{C' C_2 n \log \beta}$ images par l'application exponentielle de morceaux d'hypersurfaces de degré d contenues dans le compact K défini dans le

lemme III.5. En utilisant le lemme III.6, le fait que m_u est l'image par l'application exponentielle de la mesure de Lebesgue et les inclusions (I), on obtient :

$$m_u\{\bar{y} \in \mathcal{P}_0^\infty(\bar{x}) / d(\bar{y}, \partial\mathcal{P}_0^\infty(\bar{x})) < \epsilon\} < d^2[(\ln r_0 - n \ln \beta) / \ln(\xi/\delta)]e^{-C' C_2 n \log \beta} C_0 C_5 \epsilon.$$

□

Preuve du théorème A'. Il nous suffit (théorème G cf. Introduction) d'établir la convergence des deux séries :

$$\sum_{n < 0} \|E(f|\mathcal{A}_n)\|_2 < \infty \quad \text{et} \quad \sum_{n > 0} \|f - E(f|\mathcal{A}_n)\|_2 < \infty.$$

Les partitions \mathcal{P}_n^∞ sont mesurables au sens de Rokhlin. Pour tout n , il existe donc des familles de probabilités conditionnelles $(m_P)_{P \in \mathcal{P}_n^\infty}$ permettant d'exprimer l'espérance conditionnelle par rapport aux tribus \mathcal{A}_n : pour toute fonction f intégrable, pour m -presque tout x ,

$$E(f|\mathcal{A}_n)(\bar{x}) = \int_{\mathcal{P}_n^\infty(\bar{x})} f(y) dm_{\mathcal{P}_n^\infty(x)}(y).$$

Par construction il existe une famille $\{F(n, \bar{x})\}_{n \in \mathbb{Z}, \bar{x} \in G/\Gamma}$ de sous-ensembles de H_u relativement compacts contenant Id tels que pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout $\bar{x} \in G/\Gamma$, on ait :

$$\mathcal{A}_n(\bar{x}) = F(n, \bar{x})\bar{x} = T^{-n}\mathcal{A}_0(T^n\bar{x}) = T^{-n}F(0, T^n\bar{x})T^n\bar{x}.$$

Les probabilités conditionnelles s'expriment, pour toute fonction f intégrable, pour m -presque tout x , sous la forme :

$$E(f|\mathcal{A}_n)(\bar{x}) = \frac{1}{m_u(T^{-n}F(0, T^n\bar{x})T^n)} \int_{T^{-n}F(0, T^n\bar{x})T^n} f(h_u\bar{x}) dh_u \quad (E).$$

Donnons-nous une fonction φ appartenant à la classe \mathcal{C} et considérons les constantes C_0'' et p associées à φ dans la proposition II.1. Choisissons un nombre C_7 supérieur à $C_6 + D$, puis δ inférieur à ξ (voir lemme III.2), β dans l'intervalle $]1, \zeta^{((2C_0''+1)C_7)^{-1}}[$, ρ dans l'intervalle $] \beta^{C_7}, (\frac{\zeta}{\beta^{C_7}})^{1/2C_0''}[$ et enfin M suffisamment grand pour que ρ soit inférieur à $\beta^{Mp/C_0''}$.

Prenons un point $\bar{x} \in W_n^{\delta, \beta}$. Nous avons montré l'inclusion : $\Delta_u(\beta^n)\bar{x} \subset \mathcal{P}_0^\infty(\bar{x})$ (lemme III.2). La propriété **R2** du recouvrement assure que l'ensemble $U_{\bar{x}}^{F(0, \bar{x}), \beta^n}$ est un pavé. Cela signifie que les hypothèses de la proposition II.1 décrivant la vitesse de répartition des feuilles dilatées sont satisfaites, donc que l'on a (l'entier n considéré ici est négatif) :

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{m_u(T^{-n}F(0, \bar{x})T^n)} \int_{T^{-n}F(0, \bar{x})T^n} \varphi_{[\frac{1-n}{M}]}(h_u T^{-n}\bar{x}) dh_u \right| \\ & \leq C_0'' \left(\frac{\bar{\mu}(\partial U(\rho^n))}{\beta^{nD}} + \zeta^n \rho^{-2C_0''n} + \rho^{\frac{-C_0''n}{M}} \beta^{np} \right), \end{aligned}$$

soit encore (cf. l'égalité (E))

$$|\mathbb{E}(\varphi_{[\frac{1-n}{M}]}|\mathcal{A}_n)(T^{-n}x)| \leq C_0'' \left(\frac{\bar{\mu}(\partial U(\rho^n)) + \zeta^n \rho^{-2C_0''n}}{\beta^{nD}} + \rho^{\frac{-C_0''n}{M}} \beta^{np} \right),$$

et, puisque

$$\bar{\mu}(\partial U(\rho^n)) \leq C_6 \beta^{-C_6 n} \rho^n$$

(lemme III.7), les choix que nous avons faits pour les paramètres β, ρ, M assurent qu'il existe $\eta > 1$ et $C_8 > 0$ tels que

$$|\mathbb{E}(\varphi_{[\frac{1-n}{M}]}|\mathcal{A}_n)(T^{-n}x)| \leq C_8 \eta^n.$$

Nous avons aussi montré que $\bar{\mu}({}^c W_n^{\delta, \beta})$ est inférieur à $C_4 \beta^{nq}$ (lemme III.4). Coupons $\mathbb{E}(\mathbb{E}(\varphi_{[\frac{1-n}{M}]}|\mathcal{A}_n)^2)$ en deux :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}(\mathbb{E}(\varphi_{[\frac{1-n}{M}]}|\mathcal{A}_n)^2) \\ &= \int_{T^{-n}W_n^{\delta, \beta}} \mathbb{E}(\varphi_{[\frac{1-n}{M}]}|\mathcal{A}_n)^2(\bar{x}) \, d\bar{\mu}(\bar{x}) \\ & \quad + \int_{T^{-nc}W_n^{\delta, \beta}} \mathbb{E}(\varphi_{[\frac{1-n}{M}]}|\mathcal{A}_n)^2(\bar{x}) \, d\bar{\mu}(\bar{x}). \end{aligned}$$

La première des deux intégrales est inférieure à $C_8 \eta^n$ et on majore la seconde par $\|\chi_{[\frac{1-n}{M}]} * \varphi\|_4 (C_4 \beta^{nq})^{1/2}$ grâce à l'inégalité de Cauchy. L'inégalité triangulaire et le fait que φ appartienne à \mathcal{C} donne alors :

$$\begin{aligned} & \|\mathbb{E}(\varphi|\mathcal{A}_n)\|_2 \\ & \leq \|\mathbb{E}(\varphi - \varphi_{[\frac{1-n}{M}]}|\mathcal{A}_n)\|_2 + \|\mathbb{E}(\varphi_{[\frac{1-n}{M}]}|\mathcal{A}_n)\|_2 \\ & \leq C \rho^{[\frac{1-n}{M}]} + (\|\varphi_{[\frac{1-n}{M}]}^2\|_4 (C_4 \beta^{nq})^{1/2} + C_8 \eta^n)^{1/2}, \end{aligned}$$

et la convergence de la première série est établie.

Les atomes de la tribu \mathcal{A}_n sont les images par T^{-n} des atomes de la tribu \mathcal{A}_0 qui sont des morceaux de feuilles dilatées par T . Par suite, lorsque n tend vers $+\infty$ le diamètre des atomes de \mathcal{A}_n décroît exponentiellement vite vers 0 : il existe $C_9 > 0$ et $\gamma > 1$ tels que, pour tout $\bar{x} \in G/\Gamma$, pour tout $n \geq 0$, on ait

$$\text{Diam}(\mathcal{P}_n^\infty) \leq C_9 \gamma^{-n}.$$

L'inégalité triangulaire, les propriétés (22) et (23) (des fonctions de la classe \mathcal{C}) fournissent alors la majoration suivante :

$$\begin{aligned} \|\mathbb{E}(\varphi|\mathcal{A}_n) - \varphi\|_2 & \leq \|\mathbb{E}(\varphi - \varphi_{[\frac{n-1}{M}]}|\mathcal{A}_n)\|_2 \\ & \quad + \|\varphi_{[\frac{n-1}{M}]} - \mathbb{E}(\varphi_{[\frac{n-1}{M}]}|\mathcal{A}_n)\|_2 + \|\varphi_{[\frac{n-1}{M}]} - \varphi\|_2 \\ & \leq 2C \rho^{-pn/M} + C \rho^{Cn/M} C_9^p \gamma^{-np}. \end{aligned}$$

Si M est choisi suffisamment grand la convergence de la seconde série est établie. \square

4.5. Exemples d'applications géométriques. On peut utiliser le tlc pour étudier les propriétés ergodiques de flots géodésiques sur des variétés de volume infini. Nous le montrons pour des surfaces de courbure négative constante fibrées au dessus d'une surface de volume fini avec des fibres \mathbb{Z}^d ([28], [16], [57]).

Encore une fois nous étudions l'application au temps 1 associée. On peut la représenter comme un produit gauche au dessus de l'application au temps 1 du flot géodésique sur la base de volume fini :

$$T_\varphi : X \times \mathbb{Z}^d \rightarrow X \times \mathbb{Z}^d : (x, y) \mapsto (Tx, y + \varphi(x)),$$

où T est l'application au temps 1 du flot sur la base (de volume fini) et φ est la fonction à valeurs dans \mathbb{Z}^d les déplacements dans les fibres. Les itérés de T_φ sont donnés par :

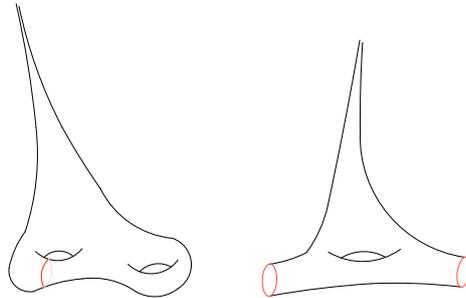
$$T_\varphi^n(x, y) = (T^n x, y + S_n \varphi(x))$$

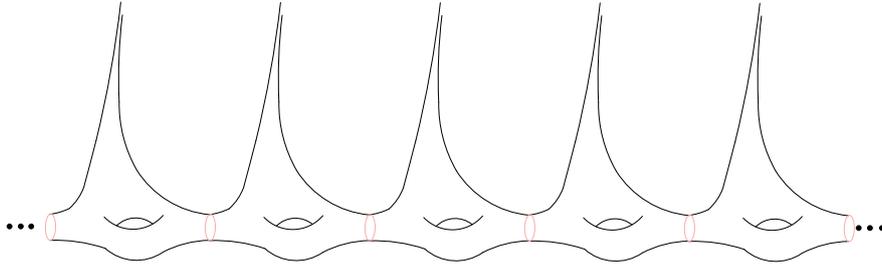
On peut utiliser le théorème limite local pour obtenir des critères de récurrence pour le cocycle $S_n \varphi$: si la probabilité $\mathbb{P}(S_n \varphi \in B)$ (où B est une boule) est équivalente à $cn^{-d/2}$ alors le cocycle est récurrent pour (et seulement pour) $d \leq 2$. Pour $d = 2$ letlc (non dégénéré) suffit à obtenir la récurrence. On a en effet le théorème suivant [16] (voir aussi [57]).

Théorème 4.24. *Soit (X, T, μ) un système dynamique et φ une fonction à valeurs dans \mathbb{R}^2 . Si φ satisfait le tlc pour les sous-suites alors le cocycle $S_n \varphi$ est récurrent.*

Si de plus (X, T, μ) est un K -système, alors la récurrence peut entraîner l'ergodicité. Il est donc possible de déduire que le flot sur une surface périodique à fibres \mathbb{Z}^d est ergodique si et seulement si $d \leq 2$ (voir [28] pour plus de détails).

Soit $PSL(2, \mathbb{R})/\Gamma_0$ le fibré unitaire tangent d'une surface hyperbolique d'aire finie. Si l'on coupe la surface le long d'une ou deux orbites périodiques et que l'on recolle ensemble des copies suivant la (ou les) géodésiques choisies on obtient de nouvelles surfaces d'aire infinie dont le fibré unitaire tangent est donné par un quotient $PSL(2, \mathbb{R})/\Gamma$ avec $\Gamma_0/\Gamma = \mathbb{Z}$ ou $\Gamma_0/\Gamma = \mathbb{Z}^2$.





Dans un tel cas la fonction φ décrivant les déplacements dans les fibres prend un nombre fini de valeurs. Si nous considérons l'application flot au temps ϵ pour ϵ assez petit, alors les valeurs de φ sont \pm les générateurs de \mathbb{Z} ou \mathbb{Z}^2 . Les ensembles où φ prend ses différentes valeurs sont des bandes autour des orbites périodiques le long desquelles on coupe; ce sont des ensembles réguliers. Donc par convolution le théorème de la section 4.3 est satisfait par φ . Il en est de même du tlc pour les sous-suites. Grâce au résultat de [16] on en déduit que le flot géodésique sur $PSL(2, \mathbb{R})/\Gamma$ est récurrent.

Que se passe-t-il pour $d \geq 3$? The geodesic flow is now transient. The clt can be used to precise some aspects of the behaviour of the flow.

Plus généralement, on peut étudier le comportement d'une marche aléatoire stationnaire sur \mathbb{R}^d . Soit (X, T, μ) un système dynamique ergodique et φ une fonction mesurable sur X à valeurs dans \mathbb{R}^d , avec $d \geq 2$. Les sommes ergodiques $\sum_{k=0}^{n-1} \varphi(T^k x)$ définissent un processus vectoriel. Quand φ est intégrable et n'est pas centrée alors les sommes ergodiques tendent presque sûrement vers ∞ dans la direction de l'espérance $\int \varphi d\mu$. Nous allons nous intéresser au cas où φ est centré. Une question est : dans quelles directions les sommes ergodiques vont-elles à l'infini? Quand φ satisfait un tlc, on peut penser que les sommes se comportent comme un mouvement brownien.

Soit (B_t) le mouvement brownien standard dans \mathbb{R}^d , pour $d \geq 2$. Si \mathcal{C} est un cône d'intérieur non-vide dans \mathbb{R}^d , la proportion de temps passé par B_t dans \mathcal{C} est

$$\tau_{\mathcal{C}}(t) = \int_0^t \mathbf{1}_{\mathcal{C}}(B_s) ds.$$

Théorème 4.25. *Soit \mathcal{C} un cône d'intérieur non-vide, de complémentaire d'intérieur non-vide et de frontière $\partial\mathcal{C}$ négligeable. on a presque sûrement $\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\tau_{\mathcal{C}}(t)}{t} = 1$ et $\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\tau_{\mathcal{C}}(t)}{t} = 0$.*

Soit (X, T, μ) un système dynamique ergodique et φ une fonction mesurable sur X à valeurs dans \mathbb{R}^d , $d \geq 2$. Supposons que φ soit bornée et centrée. Soit \mathcal{C} un cône d'intérieur non vide et de frontière $\partial\mathcal{C}$ négligeable.

Soit $(W_n)_{n \geq 1}$ le processus à valeur dans l'ensemble des fonctions continues défini par interpolations affines de la façon suivante : pour $x \in X$ et $n \geq 1$,

$$W_n(x, s) = \varphi_k(x) + (ns - k)(\varphi_{k+1}(x) - \varphi_k(x)) \text{ if } s \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right[.$$

C'est un processus à valeurs dans $(\mathcal{C}_d([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$ l'espace des fonctions continues de $[0, 1]$ dans \mathbb{R}^d .

On dit que le principe d'invariance est satisfait si ce processus $(\frac{W_n(x, \cdot)}{\sqrt{n}})_{n \geq 1}$ (défini sur l'espace (X, μ) et à valeurs dans $\mathcal{C}_d([0, 1])$) converge en loi vers un mouvement brownien dans \mathbb{R}^d . Le temps passé par $W_n(x, s)$ dans \mathcal{C} est

$$\tau_{n, \mathcal{C}}(x) = \int_0^1 \mathbf{1}_{\mathcal{C}}(W_n(x, s)) ds.$$

On a le résultat suivant ([18]).

Théorème 4.26. *Supposons que (X, T, μ) soit ergodique, que le principe d'invariance soit satisfait pour une fonction $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}^d$ et que \mathcal{C} soit un cône d'intérieur non-vide, de complémentaire d'intérieur non-vide et de frontière négligeable dans \mathbb{R}^d . Alors, pour presque tout x ,*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \tau_{n, \mathcal{C}}(x) = 1 \text{ and } \liminf_{n \rightarrow \infty} \tau_{n, \mathcal{C}}(x) = 0.$$

Revenons aux surfaces périodiques à fibres \mathbb{Z}^d ($d \geq 3$). Pour des surfaces obtenues en recollant une surface d'aire finie le long de trois (ou plus) géodésiques périodiques, le principe d'invariance est satisfait par φ la fonction à ensemble de valeurs fini qui décrit les déplacements dans les fibres. On déduit du théorème précédent que, presque sûrement, la proportion passé par le flot géodésique dans un cône donné oscille infiniment souvent entre 0 et 1.

5. UN ASSOUPPLISSEMENT DE LA MÉTHODE DES MARTINGALES

5.1. Mélange et équidistribution : un nouveau point de vue. Le contenu de cette partie est essentiellement repris de [43]. Nous utilisons les notations de l'exemple 5. Une fonction φ est dite η -höldérienne on $X = G/\Gamma$ si :

$$C_\varphi^{(\eta)} = \sup_{y \neq x \in X} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{d(x, y)^\eta} < \infty.$$

Proposition 5.1. *Soit $F \subseteq \theta^+$ un ensemble de diamètre inférieur à r_0 tel que pour certains nombres $B > 0$ et α , pour tout $\beta > 0$, on ait :*

$$m_u(\partial F(\beta)) \leq C\beta^\alpha.$$

Il existe $\xi > 1$ et $C > 0$ tels que, pour toute fonction intégrable centrée φ , pour tout $n \geq 1$ et $x \in G/\Gamma$ on ait :

$$\left| \frac{1}{m_u(T^n F T^{-n})} \int_{T^n F T^{-n}} \varphi(\theta^+ x) d\theta^+ \right| \leq \frac{C}{m_u(F)} (\|\varphi\|_\infty + C_\varphi^{(\eta)}) \xi^{-n}.$$

Mais la régularité de φ dans la direction de θ^+ n'a pas d'importance ici : on calcule une intégrale dans cette direction. On peut préciser cette inégalité, en faisant appel

à des régularités directionnelles. Définissons

$$C_\varphi^{(\eta,+)} = \sup_{x \in X} \sup_{u \in \mathbb{R}^{d-1}} \frac{|\varphi(x) - \varphi(\theta_u^+ x)|}{\|u\|^\eta},$$

et de manière analogue

$$C_\varphi^{(\eta,0,-)} = \sup_{x \in X} \sup_{v \in \mathbb{R}^{d-1} k \in K} \frac{|\varphi(x) - \varphi(\theta_v^+ kx)|}{d(x, \theta_v^+ kx)^\eta}.$$

Proposition 5.2. *Soit $F \subseteq \theta^+$ de diamètre inférieur à r_0 tel qu'il existe $B > 0$ et α , pour lesquels pour tout $\beta > 0$ on ait :*

$$m_u(\partial F(\beta)) \leq C\beta^\alpha.$$

Il existe $\xi > 1$ et $C > 0$ tels que, pour toute fonction intégrable centrée φ , pour tout $n \geq 1$ et $x \in G/\Gamma$ on ait :

$$\left| \frac{1}{m_u(T^n F T^{-n})} \int_{T^n F T^{-n}} \varphi(\theta^+ x) d\theta^+ \right| \leq \frac{C}{m_u(F)} (\|\varphi\|_\infty + C_\varphi^{(\eta,0,-)}) \xi^{-n}.$$

Démonstration. Considérons une fonction φ dont le support est contenu dans $P = \theta_{[-r_0, r_0]^{d-1}}^+ B_K(r_0) \theta_{[-r_0, r_0]^{d-1}}^-$. On régularise φ dans la direction θ^+ : soit f une fonction C^∞ nulle en dehors de $\theta_{[-r_0, r_0]^{d-1}}^+$, positive ou nulle, intégrale 1 ($C_f^{(1)}$ est la constante de Lipschitz de f). Définissons ψ par :

$$\psi(\theta_u^+ k \theta_s^- x) = f(\theta_u^+) \int_{\Delta^+(r_0)} \varphi(\theta_{u'}^+ k \theta_s^- x) d\theta_{u'}^+,$$

si $(\theta_u^+, k, \theta_s^-) \in \Delta^+(r_0) \times B_K(r_0) \times \Delta^-(r_0)$, et $\psi(y) = 0$ si y n'appartient pas à P .

Lemme 5.3. *Les fonctions φ et ψ ont la même intégrale et*

$$C_\psi^{(\eta)} \leq C (\|\varphi\|_\infty + C_\varphi^{(\eta,0,-)}).$$

Démonstration. Le premier point est une conséquence du théorème de Fubini. Montrons la majoration. Prenons $(\theta_{u_1}^+, k_1, \theta_{s_1}^-)$ et $(\theta_{u_2}^+, k_2, \theta_{s_2}^-)$ deux points dans $\Delta^+(r_0) \times B_K(r_0) \times \Delta^-(r_0)$ on a :

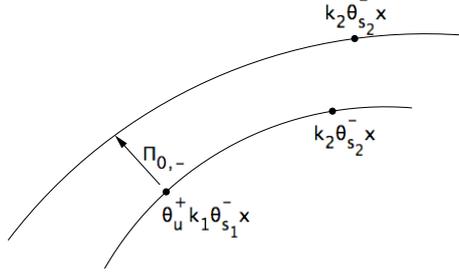
$$\begin{aligned} & |\psi(\theta_{u_1}^+ k_1 \theta_{s_1}^- x) - \psi(\theta_{u_2}^+ k_2 \theta_{s_2}^- x)| \\ &= \left| f(\theta_{u_1}^+) \int_{\Delta^+(r_0)} \varphi(\theta_{u'}^+ k_1 \theta_{s_1}^- x) d\theta_{u'}^+ - f(\theta_{u_2}^+) \int_{\Delta^+(r_0)} \varphi(\theta_{u'}^+ k_2 \theta_{s_2}^- x) d\theta_{u'}^+ \right| \\ &\leq \|\varphi\|_\infty |f(\theta_{u_1}^+) - f(\theta_{u_2}^+)| m_u(\Delta^+(r_0)) \\ &\quad + \|f\|_\infty \left| \int_{\Delta^+(r_0)} \varphi(\theta_{u'}^+ k_1 \theta_{s_1}^- x) d\theta_{u'}^+ - \int_{\Delta^+(r_0)} \varphi(\theta_{u'}^+ k_2 \theta_{s_2}^- x) d\theta_{u'}^+ \right|. \end{aligned}$$

Notons $\Pi_{0,-}$ l'application d'holonomie le long de la direction neutre/stable $K\theta^-$ de $\Delta^+(2r_0)k_1\theta_{s_1}^- x$ sur $\Delta^+(3r_0)k_2\theta_{s_2}^- x$. C'est une projection locale définie par

$$\Pi_{0,-}(\theta_u^+ k_1 \theta_{s_1}^-) = \theta_{u'}^+ k_2 \theta_{s_2}^-$$

s'il existe (k, θ^-) dans $B_K(2r_0) \times \Delta^-(2r_0)$ tel que

$$k\theta^- \theta_u^+ k_1 \theta_{s_1}^- = \theta_{u'}^+ k_2 \theta_{s_2}^-.$$



Cette application d'holonomie a les propriétés suivantes :

$$d(\Pi_{0,-}(\theta_u^+ k_1 \theta_{s_1}^- x), \theta_u^+ k_1 \theta_{s_1}^- x) \leq Cd(k_1 \theta_{s_1}^- x, k_2 \theta_{s_2}^- x),$$

$$|J_{\Pi_{0,-}}(\theta_u^+ k_1 \theta_{s_1}^- x) - 1| \leq Cd(k_1 \theta_{s_1}^- x, k_2 \theta_{s_2}^- x),$$

où $J_{\Pi_{0,-}}$ est le déterminant jacobien de $\Pi_{0,-}$. On a :

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Delta^+(r_0)} \varphi(\theta_{u'}^+ k_1 \theta_{s_1}^- x) d\theta_{u'}^+ - \int_{\Delta^+(r_0)} \varphi(\theta_{u'}^+ k_2 \theta_{s_2}^- x) d\theta_{u'}^+ \right| \\ &= \left| \int_{\Delta^+(r_0)} \varphi(\theta_{u'}^+ k_1 \theta_{s_1}^- x) d\theta_{u'}^+ - \int_{\Pi_{0,-}^{-1}(\Delta^+(r_0))} (\varphi \circ \Pi_{0,-} \cdot J_{\Pi_{0,-}})(\theta_{u'}^+ k_1 \theta_{s_1}^- x) d\theta_{u'}^+ \right| \\ &\leq \int_{\Delta^+(2r_0)} |\varphi(\theta_{u'}^+ k_1 \theta_{s_1}^- x) - \varphi(\Pi_{0,-}(\theta_{u'}^+ k_1 \theta_{s_1}^- x))| d\theta_{u'}^+ \\ &\quad + \int_{\Delta^+(2r_0)} |\varphi(\Pi_{0,-}(\theta_{u'}^+ k_1 \theta_{s_1}^- x))| \cdot |J_{\Pi_{0,-}}(\theta_{u'}^+ k_1 \theta_{s_1}^- x) - 1| d\theta_{u'}^+ \\ &\leq Cm_u(\Delta^+(2r_0)) C_\varphi^{(\eta,0,-)} d(k_1 \theta_{s_1}^- x, k_2 \theta_{s_2}^- x)^\eta \\ &\quad + C \|\varphi\|_\infty m_u(\Delta^+(2r_0)) d(k_1 \theta_{s_1}^- x, k_2 \theta_{s_2}^- x) \\ &\leq C(\|\varphi\|_\infty + C_\varphi^{(\eta,0,-)}) d(k_1 \theta_{s_1}^- x, k_2 \theta_{s_2}^- x)^\eta. \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} & |\psi(\theta_{u_1}^+ k_1 \theta_{s_1}^- x) - \psi(\theta_{u_2}^+ k_2 \theta_{s_2}^- x)| \\ &\leq \|f\|_\infty C (\|\varphi\|_\infty + C_\varphi^{(\eta,0,-)}) d(k_1 \theta_{s_1}^- x, k_2 \theta_{s_2}^- x)^\eta + C \|\varphi\|_\infty d(\theta_{u_1}^+, \theta_{u_2}^+) \\ &\leq C (\|\varphi\|_\infty + C_\varphi^{(\eta,0,-)}) d(\theta_{u_1}^+ k_1 \theta_{s_1}^-, \theta_{u_2}^+ k_2 \theta_{s_2}^-)^\eta \end{aligned}$$

□

Revenons à la preuve de la proposition 5.2. La fonction ψ étant η -höldérienne, on lui applique la proposition 5.1. Pour tout $n \geq 1$, tout x , on a :

$$\left| \frac{1}{m_u(T^n FT^{-n})} \int_{T^n FT^{-n}} \psi(\theta_u^+ x) d\theta_u^+ \right| \leq \frac{C (\|\psi\|_\infty + C_\psi^{(\eta)}) \xi^{-n}}{m_u(F)}$$

et, d'après le lemme :

$$\left| \frac{1}{m_u(T^n FT^{-n})} \int_{T^n FT^{-n}} \psi(\theta_u^+ x) d\theta_u^+ \right| \leq \frac{C (\|\varphi\|_\infty + C_\varphi^{(\eta,0,-)}) \xi^{-n}}{m_u(F)}$$

Il nous reste à estimer la différence entre les deux intégrales :

$$\frac{1}{m_u(T^n FT^{-n})} \int_{T^n FT^{-n}} \psi(\theta_u^+ x) d\theta_u^+ \quad \text{et} \quad \frac{1}{m_u(T^n FT^{-n})} \int_{T^n FT^{-n}} \varphi(\theta_u^+ x) d\theta_u^+.$$

Ces intégrales sont des sommes d'intégrales de φ et ψ sur les composantes connexes de l'intersection de $P = \Delta^+(r_0)B_K(r_0)\Delta^-(r_0)x$ avec $T^n FT^{-n}$. Les intégrales sur ces composantes connexes ne diffèrent que sur les morceaux qui contiennent un point du bord de $T^n FT^{-n}x$ (sur les "tranches" entières les intégrales de φ et ψ sont égales par définition de ψ). Nous avons donc :

$$\left| \frac{1}{m_u(T^n FT^{-n})} \int_{T^n FT^{-n}} (\psi(\theta_u^+ x) - \varphi(\theta_u^+ x)) d\theta_u^+ \right| \leq 2\|\varphi\|_\infty \frac{m_u(\partial T^n FT^{-n}(r_0))}{m_u(T^n FT^{-n})}.$$

Soit θ_u^+ un point de $T^n FT^{-n}$ à distance inférieure à r_0 du bord de $T^n FT^{-n}$; il existe $\theta_{u'}^+ \in \partial T^n FT^{-n}$ tel que : $d(\theta_u^+, \theta_{u'}^+) \leq r_0$. Nous avons donc $d(T^{-n}\theta_u^+T^n, T^{-n}\theta_{u'}^+T^n) \leq Cr_0e^{-n}$, autrement dit $T^{-n}\theta_u^+T^n$ appartient à $\partial F(Cr_0e^{-n})$. On en déduit que l'ensemble $\partial T^n FT^{-n}(r_0)$ est inclus dans $T^n \partial F(Cr_0e^{-n}) T^{-n}$. L'action de T sur θ^+ par conjugaison est linéaire, par conséquent :

$$\begin{aligned} \frac{m_u(\partial T^n FT^{-n}(r_0))}{m_u(T^n FT^{-n})} &\leq \frac{m_u(T^n \partial F(Cr_0e^{-n}) T^{-n})}{m_u(T^n FT^{-n})} \\ &\leq \frac{m_u(\partial F(Cr_0e^{-n}))}{m_u(F)}, \end{aligned}$$

de sorte que

$$\left| \frac{1}{m_u(T^n FT^{-n})} \int_{T^n FT^{-n}} (\psi(\theta_u^+ x) - \varphi(\theta_u^+ x)) d\theta_u^+ \right| \leq C \frac{\|\varphi\|_\infty e^{-n}}{m_u(F)},$$

et

$$\left| \frac{1}{m_u(T^n FT^{-n})} \int_{T^n FT^{-n}} \varphi(\theta_u^+ x) d\theta_u^+ \right| \leq C \frac{(\|\varphi\|_\infty + C_\varphi^{(\eta, 0, -)}) \xi^{-n}}{m_u(F)}.$$

On s'affranchit de la condition sur le support de φ grâce à une partition de l'unité associée subordonnée à un recouvrement de G/Γ par des ensembles de la forme $\Delta^+(r_0)B_K(r_0)\Delta^-(r_0)y$. \square

De ce résultat on peut revenir au mélange et obtenir un nouvel énoncé, une propriété de mélange anisotropique.

Théorème 5.4. *Soient φ et ψ deux fonctions höldériennes sur G/Γ . Il existe deux nombres réels $\zeta > 1$ et $C > 0$ tels que, pour tout n , on ait :*

$$(4) \quad |\langle \varphi, \psi \circ T^{-n} \rangle| \leq C (\|\varphi\|_\infty + C_\varphi^{(\eta, 0, -)}) (\|\psi\|_\infty + C_\psi^{(\eta, +)}) \zeta^{-|n|}.$$

Démonstration. Considérons une suite de tribus, (\mathcal{A}_n) dont les atomes sont des morceaux réguliers de feuilles instables, telles que $\mathcal{A}_n = T^{-n}\mathcal{A}_0$ (nous n'avons pas besoin d'une filtration, de sorte que les mesures pour m_u des atomes de \mathcal{A}_0 peuvent

être choisies bornées inférieurement). Nous avons :

$$\begin{aligned}
|\langle \varphi, T^{-n}\psi \rangle| &\leq |\langle \varphi, T^{-n}(\psi - \mathbb{E}(\psi | \mathcal{A}_{n/2})) \rangle| + |\langle \varphi, T^{-n}\mathbb{E}(\psi | \mathcal{A}_{n/2}) \rangle| \\
&\leq CC_{\psi}^{(\eta,+)} \|\varphi\|_{\infty} \zeta^{-n} + |\langle \varphi, \mathbb{E}(T^{-n}\psi | \mathcal{A}_{-n/2}) \rangle| \\
&\leq CC_{\psi}^{(\eta,+)} \|\varphi\|_{\infty} \zeta^{-n} + |\langle \mathbb{E}(\varphi | \mathcal{A}_{-n/2}), \mathbb{E}(T^{-n}\psi | \mathcal{A}_{-n/2}) \rangle| \\
&\leq CC_{\psi}^{(\eta,+)} \|\varphi\|_{\infty} \zeta^{-n} + C\|\psi\|_{\infty} (\|\varphi\|_{\infty} + C_{\varphi}^{(\eta,0,-)}) \xi^{-n}.
\end{aligned}$$

□

5.2. Tlc et mélange fort. Nous allons montrer que la propriété de mélange fort obtenue dans la section précédente implique le tlc. Nous le ferons en suivant les calculs simples utilisés par Jan dans [35]. La fait de ne pas avoir besoin de construire une filtration simplifie beaucoup la construction de la suite de tribus considérée \mathcal{A}_n . Certes l'étude de la fonction caractéristique des sommes normalisées est plus compliquée que dans le cas d'une martingale. Néanmoins la méthode de Jan est élémentaire et souple. Pour l'illustrer nous allons l'appliquer à un cas non stationnaire dans lequel il pourrait être difficile d'appliquer la méthode des martingales.

Le caractère discret du temps n'a aucune importance dans (5.2). Le même raisonnement permet d'établir la proposition suivante.

Proposition 5.5. *Soit \mathcal{A} une tribu dont les atomes sont des morceaux d'orbites de θ^+ contenant des cubes $\theta_{[-\epsilon, \epsilon]^{d-1}}^+$ (pour un ϵ uniforme). Il existe $C > 0$, $\xi > 1$ tels que, pour toute fonction η -höldérienne φ sur X , pour tout $t > 0$, on ait*

$$(5) \quad |\varphi - \mathbb{E}[\varphi | g_{-t}\mathcal{A}]| \leq CC_{\varphi}^{(\eta,+)} \xi^{-t}$$

et

$$(6) \quad \left\| \mathbb{E}[\varphi | g_t\mathcal{A}] - \int_{\Omega} \varphi d\nu \right\|_{\infty} \leq C (\|\varphi\|_{\infty} + C_{\varphi}^{(\eta,0,-)}) \xi^{-t}.$$

Considérons maintenant une suite $(t_k)_{k \geq 1}$ de temps positifs minorés inférieurement (par un nombre $\delta > 0$, $t_k \geq \delta$ pour tout k) et notons $s_k = \sum_{j=1}^k t_j$. Pour φ et ψ deux fonctions η -höldériennes centrées

$$\begin{aligned}
|\langle \psi \circ g_{-s_k}, \varphi \rangle| &= |\langle (\psi - \mathbb{E}[\psi | g_{-s_k/2}\mathcal{A}]) \circ g_{-s_k}, \varphi \rangle + \langle \mathbb{E}[\psi | g_{-s_k/2}\mathcal{A}] \circ g_{-s_k}, \varphi \rangle| \\
&\leq CC_{\psi}^{(\eta,+)} \|\varphi\|_{\infty} \xi^{-s_k/2} + |\langle \mathbb{E}[\psi | g_{-s_k/2}\mathcal{A}] \circ g_{-s_k}, \varphi \rangle|.
\end{aligned}$$

Mais

$$\mathbb{E}[\psi | g_{-s_k/2}\mathcal{A}] \circ g_{-s_k} = \mathbb{E}[\psi \circ g_{-s_k} | g_{s_k/2}\mathcal{A}],$$

de sorte que nous obtenons

$$|\langle \psi \circ g_{-s_k}, \varphi \rangle| \leq CC_{\psi}^{(\eta,+)} \|\varphi\|_{\infty} \xi^{-s_k/2} + |\langle \mathbb{E}[\psi \circ g_{-s_k} | g_{s_k/2}\mathcal{A}], \mathbb{E}[\varphi | g_{s_k/2}\mathcal{A}] \rangle|$$

et, comme φ est centrée,

$$\left\| \mathbb{E}[\varphi | g_{s_k/2}\mathcal{A}] \right\|_{\infty} \leq C (\|\varphi\|_{\infty} + C_{\varphi}^{(\eta,0,-)}) \xi^{-s_k/2}.$$

On a donc

$$(7) \quad |\langle \psi \circ g_{-s_k}, \varphi \rangle| \leq C \left(C_{\psi}^{(\eta,+)} \|\varphi\|_{\infty} + \|\psi\|_{\infty} \|\varphi\|_{\infty} + C_{\varphi}^{(\eta,0,-)} \|\psi\|_{\infty} \right) \xi^{-k\delta/2}.$$

Nous allons déduire le théorème suivant grâce à la méthode de Jan.

Théorème 5.6. *Soit $(t_k)_{k \geq 1}$ une suite de temps positifs bornés inférieurement, et $s_k = \sum_{j=1}^k t_j$. Soit φ fonction η -höldérienne centrée sur G/Γ . Si les variances des variables*

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \varphi \circ g_{s_k}$$

ont une limite positive alors ces variables convergent en loi vers une variable gaussienne.

Démonstration. Supposons que la limite suivante existe

$$\sigma^2(\varphi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mu \left(\left(\sum_{k=1}^n \varphi \circ g_{s_k} \right)^2 \right).$$

La propriété de mélange de la proposition (7) implique que la quantité $\sigma_{\ell}^2(\varphi)$ est bien définie :

$$\sigma_{\ell}^2(\varphi) = \mathbb{E}(\varphi^2) + 2 \sum_{k=\ell+1}^{\infty} \mathbb{E}(\varphi \circ g_{s_k} \varphi \circ g_{s_{\ell}})$$

et que la suite $(\sigma_{\ell}^2(\varphi))_{\ell}$ est bornée. On montre que $\sigma^2(\varphi)$ existe si $(\sigma_{\ell}^2(\varphi))_{\ell}$ converge au sens de Césaro :

$$\sigma^2(\varphi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^n \sigma_{\ell}^2(\varphi).$$

Considérons un espace de probabilité (Ω', \mathbb{P}') contenant (X, μ) et une suite (U_k) de variables aléatoires indépendantes de variances $\sigma_k^2(\varphi)$ définies sur Ω' , et indépendantes des variables $X_k = T^k \varphi$, de lois $1/2(\delta_{-\sigma_k(\varphi)} + \delta_{\sigma_k(\varphi)})$. Le tlc (avec conditions de Lyapounov) est vérifié pour (U_{ℓ}) :

$$\frac{1}{n^{1/2}} \sum U_k \rightarrow_{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

C'est une conséquence du fait que la quantité

$$\begin{aligned} & \left| \mathbb{E} \left(\exp \left(\frac{it}{n^{1/2}} \sum_{\ell=1}^n U_{\ell} \right) \right) - \exp \left(-\frac{1}{2} \sigma(\varphi)^2 t^2 \right) \right| \\ &= \left| \prod_{\ell=1}^n \cos \left(\frac{1}{n^{1/2}} \sigma_{\ell}(\varphi) t \right) - \exp \left(-\frac{1}{2} \sigma(\varphi)^2 t^2 \right) \right| \\ &= \left| \prod_{\ell=1}^n \left(1 - \frac{\sigma_{\ell}^2(\varphi) t^2}{2n} + O \left(\frac{1}{n^{3/2}} \right) \right) - \exp \left(-\frac{1}{2} \sigma(\varphi)^2 t^2 \right) \right| \end{aligned}$$

tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

Nous allons maintenant étudier la différence

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{it}{n^{1/2}} \sum_{k=1}^n \varphi \circ g_{s_k}\right)\right) - \mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{it}{n^{1/2}} \sum_{\ell=1}^n U_\ell\right)\right).$$

Introduisons les notations suivantes

$$B_{\ell,n} = \exp\left(\frac{it}{n^{1/2}} \varphi \circ g_{s_\ell}\right), \quad C_{\ell,n} = \exp\left(\frac{it}{n^{1/2}} U_\ell\right).$$

We have

$$(8) \quad \exp\left(\frac{it}{n^{1/2}} \sum_{\ell=1}^n \varphi \circ g_{s_\ell}\right) - \exp\left(\frac{it}{n^{1/2}} \sum_{\ell=1}^n U_\ell\right) = \prod_{\ell=1}^n B_{\ell,n} - \prod_{\ell=1}^n C_{\ell,n},$$

et

$$\prod_{\ell=1}^n B_{\ell,n} - \prod_{\ell=1}^n C_{\ell,n} = \sum_{\ell=1}^n \left(\prod_{k=1}^{\ell-1} C_{k,n} \right) \underbrace{(B_{\ell,n} - C_{\ell,n}) \left(\prod_{k=\ell+1}^n B_{k,n} \right)}_{\Delta_\ell},$$

où le produit indexé par l'ensemble vide vaut 1 par convention.

Les variables $\Delta_\ell = (B_{\ell,n} - C_{\ell,n}) \prod_{k=\ell+1}^n B_{k,n}$ et $\prod_{k=0}^{\ell-1} C_{k,n}$ sont indépendantes. Nous allons montrer que la plupart des n termes $|\mathbb{E}(\Delta_\ell)|$ sont bornés par $Cn^{-3/2} \ln n$. Cela entraînera le résultat.

Considérons une suite $(\chi(n))$ que nous fixerons plus tard (d'ordre $\ln n$). Quand $\ell + 3\chi(n) + 1 < n$, décomposons le produit Δ_ℓ en blocs :

$$\Delta_\ell = \underbrace{(B_{\ell,n} - C_{\ell,n}) \prod_{k=\ell+1}^{\ell+\chi(n)} B_{k,n}}_{\mathcal{A}} \underbrace{\prod_{k=\ell+\chi(n)+1}^{\ell+2\chi(n)} B_{k,n}}_{\mathcal{B}} \underbrace{\prod_{k=\ell+2\chi(n)+1}^{\ell+3\chi(n)} B_{k,n}}_{\mathcal{C}} \underbrace{\prod_{k=\ell+3\chi(n)+1}^n B_{k,n}}_{\mathcal{D}}.$$

Nous pouvons écrire

$$(9) \quad \mathbb{E}(\Delta_\ell) = \mathbb{E}(\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C}\mathcal{D})$$

$$(10) \quad = \mathbb{E}(\mathcal{A}(\mathcal{B} - 1)(\mathcal{C} - 1)\mathcal{D}) + \mathbb{E}(\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{D}) + \mathbb{E}(\mathcal{A}\mathcal{C}\mathcal{D}) - \mathbb{E}(\mathcal{A}\mathcal{D}).$$

Du théorème des accroissements finis on déduit que \mathcal{A} est majoré par

$$Ctn^{-1/2}(\|\varphi\|_\infty + \|U_\ell\|_\infty),$$

pour une certaine constante C , et $(\mathcal{B} - 1)$, $(\mathcal{C} - 1)$ sont tous les deux majorés par

$$\frac{2t}{n^{1/2}} \sum_{k=\ell+\chi(n)+1}^{\ell+2\chi(n)} |\varphi \circ g_{s_k}|.$$

Par conséquent $\mathbb{E}(\mathcal{A}(\mathcal{B} - 1)(\mathcal{C} - 1)\mathcal{D}) \leq C\|\varphi\|_\infty^3 \frac{t^3}{n^{3/2}} \chi(n)^2$.

Nous ne retiendrons pas la dépendance en t , ni en $\|\varphi\|_\infty$ dans nos calculs. nous écrivons

$$(11) \quad \mathbb{E}(\mathcal{A}(\mathcal{B} - 1)(\mathcal{C} - 1)\mathcal{D}) \leq C \frac{1}{n^{3/2}} \chi(n)^2.$$

Nous allons majorer les autre termes. Il se traitent tous de la même manière. Prenons par exemple : $\mathbb{E}(\mathcal{A}BD) = Cov(\mathcal{A}B, D) + \mathbb{E}(\mathcal{A}B)\mathbb{E}(D)$.

On a :

$$\begin{aligned} Cov(\mathcal{A}B, \mathcal{D}) &= Cov\left((B_{\ell,n} - C_{\ell,n}) \prod_{k=\ell+1}^{\ell+\chi(n)} B_{k,n}, \prod_{k=\ell+3\chi(n)+1}^{n-1} B_{k,n}\right) \\ &= Cov\left(\prod_{k=\ell}^{\ell+\chi(n)} B_{k,n}, \prod_{k=\ell+3\chi(n)+1}^{n-1} B_{k,n}\right) \\ &= Cov\left(\prod_{k=\ell}^{\ell+\chi(n)} \exp\left(\frac{it}{n^{1/2}}\varphi\right) \circ g_{s_k}, \prod_{k=\ell+3\chi(n)+1}^{n-1} \exp\left(\frac{it}{n^{1/2}}\varphi\right) \circ g_{s_k}\right). \end{aligned}$$

Composons les deux termes des expressions précédentes par $g_{-\ell+\chi(n)}$ et notons $\Phi(n, \ell, t)$ et $\Psi(n, \ell, t)$ les fonctions définies par

$$\Phi(n, \ell, t) = \prod_{k=\ell}^{\ell+\chi(n)} \exp\left(\frac{it}{n^{1/2}}\varphi\right) \circ g_{[s_k - s_{\ell+\chi(n)}]}$$

et

$$\Psi(n, \ell, t) = \prod_{k=\ell+3\chi(n)+1}^{n-1} \exp\left(\frac{it}{n^{1/2}}\varphi\right) \circ g_{[s_k - s_{\ell+3\chi(n)}]}.$$

Tous les temps apparaissant dans le produit définissant $\Phi(n, \ell, t)$ et $\Psi(n, \ell, t)$ sont respectivement négatifs et positifs et on a

$$Cov(\mathcal{A}B, \mathcal{D}) = Cov(\Psi(n, \ell, t) \circ g_{[s_{\ell+3\chi(n)} - s_{\ell+\chi(n)}]}, \Phi(n, \ell, t))$$

Par hypothèse $s_{\ell+3\chi(n)} - s_{\ell+\chi(n)}$ est plus grand que $2\chi(n)\delta$. Donc en appliquant (7) on obtient que la covariance $Cov(\mathcal{A}B, \mathcal{D})$ est majorée par (les exponentielles imaginaires sont bornées par 1)

$$C \left(1 + C_{\Psi(n,\ell,t)}^{(\eta,+)} + C_{\Phi(n,\ell,t)}^{(\eta,0,-)}\right) \xi^{-\chi(n)\delta}.$$

Mais

$$C_{\Phi(n,\ell,t)}^{(\eta,0,-)} \leq \sum_{k=\ell}^{\ell+\chi(n)} C_{\exp\left(\frac{it}{n^{1/2}}\varphi\right) \circ g_{[s_k - s_{\ell+\chi(n)}]}}^{(\eta,0,-)} \leq (\chi(n) + 1) C_{\exp\left(\frac{it}{n^{1/2}}\varphi\right)}^{(\eta,0,-)}$$

car, pour $s < 0$, $v \in \mathbb{R}^{d-1}$ et $k \in K$, $d(g_s \theta^+ kx, g_s x) \leq d(\theta^+ kx, x)$. De même

$$C_{\Psi(n,\ell,t)}^{(\eta,+)} \leq n C_{\exp\left(\frac{it}{n^{1/2}}\varphi\right)}^{(\eta,+)},$$

de sorte que

$$(12) \quad Cov(\mathcal{A}B, \mathcal{D}) \leq Cn^2 \zeta^{-\chi(n)}.$$

Étudions maintenant

$$\begin{aligned} \mathcal{A}B &= (B_{\ell,n} - C_{\ell,n}) \prod_{k=\ell+1}^{\ell+2\chi(n)} B_{k,n} \\ &= \left(\exp \frac{it\varphi \circ g_{s_\ell}}{n^{1/2}} - \exp \frac{itU_\ell}{n^{1/2}} \right) \exp \left(itn^{-1/2} \sum_{k=\ell+1}^{\ell+2\chi(n)} \varphi \circ g_{s_k} \right) \end{aligned}$$

Des développements de Taylor des deux autres termes aux ordres 2 et 1 on déduit

$$\exp \frac{it\varphi \circ g_{s_\ell}}{n^{1/2}} - \exp \frac{itU_\ell}{n^{1/2}} = \frac{it}{n^{1/2}} (\varphi \circ g_{s_\ell} - U_\ell) - \frac{1}{2n} (\varphi \circ g_{s_\ell} - U_\ell)^2 + D_1,$$

avec $D_1 \leq C \frac{1}{n^{3/2}}$,

$$\exp \left(itn^{-1/2} \sum_{k=\ell+1}^{\ell+2\chi(n)} \varphi \circ g_{s_k} \right) = 1 + itn^{-1/2} \sum_{k=\ell+1}^{\ell+2\chi(n)} \varphi \circ g_{s_k} + D_2,$$

avec $D_2 \leq C \frac{\chi(n)^2}{n}$, et

$$\begin{aligned} \mathcal{A}B &= \frac{it}{n^{1/2}} (\varphi \circ g_{s_\ell} - U_\ell) - \frac{t^2}{2n} (\varphi^2 \circ g_{s_\ell} - U_\ell^2) \\ &\quad - \frac{t^2}{n} \sum_{k=\ell+1}^{\ell+2\chi(n)} \varphi \circ g_{s_k} \varphi \circ g_{s_\ell} + \frac{t^2}{n} U_\ell \sum_{k=\ell+1}^{\ell+2\chi(n)} \varphi \circ g_{s_k} + D, \end{aligned}$$

avec $D \leq C \frac{\chi(n)^2}{n^{3/2}} + \frac{\chi(n)^3}{n^2} + \frac{\chi(n)^4}{n^{5/2}}$. En prenant l'espérance on obtient :

$$\begin{aligned} (13) \quad &|\mathbb{E}(\mathcal{A}B)| \\ &\leq \frac{t^2}{2n} \left(\mathbb{E}(U_\ell^2) - \left(\mathbb{E}(g_{s_\ell} \varphi^2) + 2 \sum_{k=\ell+1}^{\ell+2\chi(n)} \mathbb{E}(g_{s_k} \varphi g_{s_\ell} \varphi) \right) \right) + C \frac{\chi(n)^2}{n^{3/2}}. \end{aligned}$$

Mais par définition de U_ℓ , on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(U_\ell^2) &= \sigma_\ell^2(\varphi) = E(\varphi^2 \circ g_{s_\ell}) + 2 \sum_{k=\ell+1}^{\infty} \mathbb{E}(\varphi \circ g_{s_k} \varphi \circ g_{s_\ell}) \\ &= E(\varphi^2 \circ g_{s_\ell}) + 2 \sum_{k=\ell+1}^{\ell+2\chi(n)} \mathbb{E}(\varphi \circ g_{s_k} \varphi \circ g_{s_\ell}) \\ &\quad + 2 \sum_{k=\ell+2\chi(n)+1}^{\infty} \mathbb{E}(\varphi \circ g_{s_k} \varphi \circ g_{s_\ell}). \end{aligned}$$

En remplaçant $\mathbb{E}(U_\ell^2)$ par cette expression dans (13), on obtient

$$|\mathbb{E}(\mathcal{A}B)| \leq C \left(\left| \frac{t^2}{2n} \sum_{k=\ell+2\chi(n)+1}^{\infty} \mathbb{E}(\varphi \circ g_{s_k} \varphi \circ g_{s_\ell}) \right| + \chi(n)^2 n^{-3/2} \right),$$

et, comme le terme général de la série tend exponentiellement vite vers 0,

$$(14) \quad |\mathbb{E}(\mathcal{A}B)| \leq C \left(\frac{\zeta^{-\chi(n)}}{n} + \chi(n)^2 n^{-3/2} \right).$$

Comme on a $|\mathbb{E}(\mathcal{D})| \leq 1$, (12) et (14) impliquent

$$\mathbb{E}(\Delta_\ell) \leq C \left(\frac{\zeta^{-\chi(n)}}{n} + \chi(n)^2 n^{-3/2} + n^2 \zeta^{-\chi(n)} \right).$$

Nous pouvons maintenant majorer (8) :

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}(\prod_0^{n-1} B_{\ell,n} - \prod_0^{n-1} C_{\ell,n})| &= \left| \sum_{\ell=0}^n \mathbb{E}(\prod_{k=0}^{\ell-1} C_{k,n}) \mathbb{E}(\Delta_\ell) \right| \leq \sum_{\ell=0}^n |\mathbb{E}(\Delta_\ell)| \\ &\leq \sum_{\ell=0}^{n-3\chi(n)-1} C \left(\frac{\zeta^{-\chi(n)}}{n} + \chi(n)^2 n^{-3/2} + n^2 \zeta^{-\chi(n)} \right) \\ &\quad + \sum_{\ell=n-3\chi(n)}^n \mathbb{E}(\Delta_\ell). \end{aligned}$$

Le théorème des accroissements finis donne $\mathbb{E}(\Delta_\ell) \leq Cn^{-1/2}$. Si on prend $\chi(n) = D \ln n$ avec D suffisamment grand, alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\exp(\frac{it}{n^{1/2}} \sum_{k=1}^n \varphi \circ g_{s_k})) - \mathbb{E}(\exp(\frac{it}{n^{1/2}} \sum_{\ell=1}^n U_\ell)) &= |\mathbb{E}(\prod_0^n B_{\ell,n} - \prod_0^n C_{\ell,n})| \\ &\leq C \frac{\ln^2(n)}{n^{1/2}}. \end{aligned}$$

□

6. ANNEXE : DÉCOMPOSITIONS DE MESURES SELON UNE PARTITION

Nous avons considéré à plusieurs reprises des partitions dont les atomes sont définis par des actions de groupes de Lie et avons affirmé sans démonstration que les probabilités de la mesure de Haar sur l'espace homogène se décomposaient selon ces partitions et que les probabilités conditionnelles obtenues étaient données par les mesures de Haar du groupe définissant les atomes. Nous justifions ici ces affirmations à partir de la notion de partition mesurable due à Rokhlin. Nous ne donnons pas de démonstration complète mais des éléments permettant d'en établir.

On dit qu'une partition \mathcal{P} d'un espace de probabilité (X, m) est mesurable au sens de Rokhlin s'il existe une famille dénombrable \mathcal{F} de parties mesurables de X telle que \mathcal{P} soit la partition la plus grossière plus fine que toutes les partitions $\{F, {}^c F\}$ pour F parcourant \mathcal{F} (autrement dit les atomes de \mathcal{P} sont les intersections $\cap_{F \in \mathcal{F}} (F \text{ ou } {}^c F)$).

Les partitions construites dans ce travail sont mesurables en ce sens. Pour le voir il suffit de montrer qu'une partition \mathcal{Q} obtenue par le découpage en tranches de morceaux d'une partition finie comme dans les exemples 3 et 5 ci-dessus est mesurable.

On peut le voir comme dans le cas de la partition en tranches horizontales d'un carré (engendrée par les rectangle délimités par deux segments dont les hauteurs sont rationnelles). Il est ensuite facile de voir que les partitions \mathcal{Q}_0^∞ sont mesurables comme définies à partir d'une famille dénombrable de partitions mesurables.

Rokhlin a montré ([55]) qu'il était possible de décomposer une mesure suivant une partition mesurable. On obtient ainsi une sorte de théorème de Fubini pour des partitions qui ne sont pas définies par des structures produit.

Théorème 6.1. *Soient (X, m) un espace de probabilité standard et \mathcal{P} une partition mesurable de X . Il existe une mesure de probabilité $\mu_{\mathcal{P}}$ sur l'espace quotient X/\mathcal{P} , et une famille $(m_P)_{P \in \mathcal{P}}$ telles que, pour tout ensemble mesurable A , on ait*

$$m(A) = \int_{X/\mathcal{P}} m_P(A \cap P) d\mu_{\mathcal{P}}(P).$$

Ajoutons maintenant qu'un groupe de Lie connexe G agit sur X en préservant la mesure m et que les atomes de \mathcal{P} sont des morceaux d'orbites de cet action comme suit. Si P est un atome de \mathcal{P} alors, pour tout point x de P , on a

$$P = P_x^{(G)}.x,$$

où $P_x^{(G)}$ est une partie connexe de G , d'intérieur non vide, contenant l'élément neutre de G . Ajoutons que $g \mapsto g.x$ est une application bijective bimesurable de $P_x^{(G)}$ sur P et que le bord de $P_x^{(G)}$ est négligeable pour la mesure λ de Haar sur G . Alors les mesures m_P sont données par la mesure de Haar sur G au sens suivant. Pour toute partie A_P incluse dans P on a

$$m_P(A_P) = \frac{\lambda(A_x^{(G)})}{\lambda(P_x^{(G)})},$$

où $A_x^{(G)}$ est défini par $A_x^{(G)}.x = A_P$.

Soient A une partie mesurable de X et $\epsilon > 0$. Notons A_ϵ l'ensemble des points x de A tels que pour tout g dans $B(e, \epsilon)$, la boule de rayon ϵ centrée en l'élément neutre e de G , si x appartient à un atome P alors $g.x$ aussi. L'ensemble A_ϵ est donc l'ensemble des points de A qu'on peut déplacer de ϵ par l'action de G sans changer d'atome de \mathcal{P} .

Faisons l'hypothèse que l'ensemble que forment les bords des atomes de \mathcal{P} est de mesure nulle. Alors

$$m(A) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} m(A_\epsilon).$$

Par définition de A_ϵ pour tout ensemble B saturé pour \mathcal{P} on a

$$g.A_\epsilon \cap B = g.(A_\epsilon \cap B).$$

Pour tout ensemble mesurable saturé B , pour tout $g \in B(e, \epsilon)$, on a donc

$$m(A_\epsilon \cap B) = \int_{X/\mathcal{P}} m_P(A_\epsilon \cap B \cap P) d\mu_{\mathcal{P}}(P)$$

et

$$m(g.A_\epsilon \cap B) = m(g.(A_\epsilon \cap B)) = \int_{X/\mathcal{P}} m_P(g.A_\epsilon \cap B \cap P) d\mu_{\mathcal{P}}(P).$$

Par hypothèse m est invariante par l'action de G , on a donc

$$\int_{X/\mathcal{P}} m_P(A_\epsilon \cap B \cap P) d\mu_{\mathcal{P}}(P) = \int_{X/\mathcal{P}} m_P(g.A_\epsilon \cap B \cap P) d\mu_{\mathcal{P}}(P)$$

pour tout ensemble saturé mesurable B . On en déduit que pour $\mu_{\mathcal{P}}$ -presque tout P , on a

$$m_P(g.A_\epsilon \cap P) = m_P(A_\epsilon \cap P).$$

Cette égalité étant valable pour toute partie mesurable A , il en découle que la mesure m_P est invariante par l'action des éléments de $B(e, \epsilon)$ sur l'ensemble des points de P "à distance" inférieure à 2ϵ du bord. Sur cet ensemble m_P est donc l'image d'une mesure de Haar sur G par l'action de G (définissant P). Le nombre ϵ pouvant être arbitrairement petit, on en déduit que m_P est déduite d'une mesure de Haar sur G .

RÉFÉRENCES

- [1] D. V. Anosov, *Geodesic flows on closed Riemannian manifolds of negative curvature*, Trudy Mat. Inst. Steklov. 90 1967 209 pp.
- [2] R.L. Adler & B.Weiss, *Entropy, a complete metric invariant for automorphisms of the torus*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 57, 1967, 1573–1576.
- [3] M.B. Bekka, *On uniqueness of invariant means*, Proc. of the AMS, Volume 126, Number 2, 1998, p. 507-514
- [4] P. Billingsley, *Convergence of probability measures*. Second edition. Wiley Series in Probability and Statistics : Probability and Statistics. John Wiley and Sons, Inc., New York, 1999.
- [5] M. Blank & G. Keller & C. Liverani, *Ruelle-Perron-Frobenius spectrum for Anosov maps*, Nonlinearity 15 (2002), no. 6, 1905–1973.
- [6] E. Bolthausen, *Exact convergence rates in some martingale central limit theorems*, Ann. Probab. 10 (1982), no. 3, 672–688.
- [7] N. Bourbaki , *Éléments de mathématique : groupes et algèbres de Lie. Chapitre 9. Groupes de Lie réels compacts*. Masson, Paris, 1982.
- [8] N. Bourbaki , *Éléments de mathématique. Fascicule XXIX. Livre VI : Intégration. Chapitre 7 : Mesure de Haar. Chapitre 8 : Convolution et représentations* Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1306 Hermann, Paris 1963.
- [9] M.I. Brin & Ja. B. Pesin, *Partially hyperbolic dynamical systems*, Uspehi Mat. Nauk 28 (1973), no. 3 (171), 169–170.
- [10] T. Bröcker & T. tom Dieck, *Representations of compact Lie groups*. Graduate Texts in Mathematics, 98. Springer-Verlag, New York, 1995.
- [11] A. Broise, *Transformations dilatantes de l'intervalle et théorèmes limites. Études spectrales d'opérateurs de transfert et applications*, Astérisque 1996, no. 238, 1–109.
- [12] B.M. Brown, *Martingale central limit theorems*, Ann. Math. Statist., 42, 1971, 59 ?66.
- [13] K. Burns & A. Wilkinson, *Stable ergodicity of skew products*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 32 (1999), no. 6, 859–889.
- [14] R. Burton & M. Denker , *On the central limit theorem for dynamical systems*. Trans. Am. Math. Soc. 302, 715-726 (1987).

- [15] J.-P. Conze, *Transformations cylindriques et mesures finies invariantes*, Ann. Sci. Univ. Clermont Math. **17** (1979), p. 25-31.
- [16] J.-P. Conze, *Sur un critère de récurrence en dimension 2 pour les marches stationnaires, applications*, Ergod. Th. & Dynam. Sys. (1999), 19, 1233-1245.
- [17] J. -P. Conze & S. Le Borgne, *Méthode de martingales et flot géodésique sur une surface de courbure constante négative*, Ergodic Theory Dynam. Systems 21 (2001), no. 2, 421–441.
- [18] J.-P. Conze & S. Le Borgne, *Limit directions of a vectorial cocycle, remarks and examples*, soumis.
- [19] M. Denker & W. Philipp, *Approximation by Brownian motion for Gibbs measures and flows under a fonction*, Ergodic Theory Dynam. Systems 4 (1984), no. 4, 541–552.
- [20] D. Dolgopyat, *On decay of correlations in Anosov flows*, Ann. of Math. (2) 147 (1998), no. 2, 357–390.
- [21] D. Dolgopyat, *Limit Theorems for partially hyperbolic systems*, preprint.
- [22] D. Dolgopyat, *On dynamics of mostly contracting diffeomorphisms*, Comm. Math. Physics , 213 (2000) 181-201.
- [23] D. Dolgopyat, *On differentiability of SRB states for partially hyperbolic systems*, Invent. Math. 155 (2004), no. 2, 389–449.
- [24] C. Esseen, *Fourier Analysis of distribution fonctions. A mathematical study of the Laplace-Gaussian Law*, Acta Math., vol. 77 (1945), 1–125.
- [25] R. Fortet, *Sur une suite également répartie*, Polska Akademia Nauk. Instytut Matematyczny. Studia Mathematica, 9, (1940), 54–70.
- [26] M. Gordin, *The central limit theorem for stationary processes*.(English. Russian original) Soviet Math., Dokl. 10 (1969), 1174-1176 (1970) ; translation from Dokl. Akad. Nauk SSSR 188, 739-741 (1969).
- [27] S. Gouëzel, *Central limit theorem and stable laws for intermittent maps*, Probab. Theory Related Fields, 128, 2004, 1, 82–122.
- [28] Y. Guivarc’h, *Propriétés ergodiques, en mesure infinie, de certains systèmes fibrés*, Ergod. Th. & Dynam. Sys. (1989), 9, 433-453.
- [29] Y. Guivarc’h & J. Hardy, *Théorèmes limites pour une classe de chaînes de Markov et applications aux difféomorphismes d’Anosov* , Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. 24 (1988), no. 1, 73–98.
- [30] P. Hall & C.C. Heyde, *Martingale limit theory and its application*. Probability and Mathematical Statistics. Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1980.
- [31] E. Haeusler, *On the rate of convergence in the central limit theorem for martingales with discrete and continuous time*, Ann. Probab. 16 (1988), no. 1, 275–299.
- [32] H.Hennion & L. Hervé, *Limit theorems for Markov chains and stochastic properties of dynamical systems by quasi-compactness*, Lecture Notes in Mathematics, 1766. Springer-Verlag, Berlin, 2001.
- [33] R. Howe, *On a notion of rank for unitary representations of the classical groups*, Harmonic analysis and group representations, Liguori, Naples, 1982, pp. 223-331.
- [34] R. Howe & E.-E. Tan, *Nonabelian harmonic analysis. Applications of $SL(2, R)$* . Universitext. Springer-Verlag, New York, 1992.
- [35] C. Jan, *Vitesse de convergence dans le TCL pour des processus associés à des systèmes dynamiques et aux produits de matrices aléatoires*, Thèse, Université de Rennes 1 (2001).
- [36] C. Jan, *Rates of convergence for some processes under mixing conditions and application to random matrix products*, prépublication (2001).

- [37] A. Katok & R. J. Spatzier, *First cohomology of Anosov actions of higher rank abelian groups and applications to rigidity*, Publ. Math., Inst. Hautes Etud. Sci. 79, 131-156 (1994).
- [38] Y. Katznelson, *Ergodic automorphisms of \mathbb{T}^n are Bernoulli shifts*, Israël J. Math., 10, 186-195, 1971.
- [39] D.Y. Kleinbock & G.A. Margulis, *Bounded orbits of nonquasiunipotent flows on homogeneous spaces*. Sinai's Moscow Seminar on Dynamical Systems, 141-172, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 171, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996.
- [40] S. Le Borgne, *Limit theorems for non-hyperbolic automorphisms of the torus*, Israel J. Math., 109, 1999, 61-73.
- [41] S. Le Borgne, *Principes d'invariance pour les flots diagonaux sur $SL(d, \mathbb{R})/SL(d, \mathbb{Z})$* , Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist., PR 38, 4 (2002), 581-612.
- [42] S. Le Borgne & F. Pène, *Vitesse dans le théorème limite central pour certains processus stationnaires fortement décorrésés*, arXiv :math.PR/0306083.
- [43] S. Le Borgne & F. Pène, *Vitesse dans le théorème limite central pour certains systèmes dynamiques quasi-hyperboliques*, Bull. Soc. Math. France 133 (2005), no. 3, 395-417.
- [44] C. Liverani, *Central limit theorem for deterministic systems*, International Conference on Dynamical Systems (Montevideo, 1995), Pitman Res. Notes Math. Ser., 362, 56-75.
- [45] C. Liverani, *On contact Anosov flows*, Ann. Math. (2), 159, 1275-312, (2004).
- [46] Y. Le Jan, *The central limit theorem for the geodesic flow on noncompact manifolds of constant negative curvature*, Duke Math. J. 74 (1994), no. 1, 159-175.
- [47] I. Melbourne & M. Nicol, *Statistical properties of endomorphisms and compact group extensions*, J. London Math. Soc. (2), 70, 2004, 2, 427-446.
- [48] I. Melbourne & A. Török, *Central limit theorems and invariance principles for time-one maps of hyperbolic flows*, Comm. Math. Phys. 229 (2002), no. 1, 57-71.
- [49] I. Melbourne & A. Török, *Statistical limit theorems for suspension flows*, Israel J. Math., 144, 2004, 191-209.
- [50] C.C. Moore, *Exponential decay of correlation coefficients for geodesic flows*, Group representations, ergodic theory, operator algebras, and mathematical physics (Berkeley, Calif., 1984), 163-181, Math. Sci. Res. Inst. Publ., 6, Springer, New York, 1987.
- [51] F. Naud, *Expanding maps on Cantor sets and analytic continuation of zeta fonctions*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér., IV. Sér. 38, No.1, 116-153 (2005).
- [52] F. Pène, *Rates of convergence in the CLT for two-dimensional dispersive billiards*, Comm. Math. Phys. (2001).
- [53] M. Ratner, *The central limit theorem for geodesic flows on n -dimensional manifolds of negative curvature*, Israel J. Math. 16 (1973), 181-197.
- [54] E. Rio, *Sur le théorème de Berry-Esseen pour les suites faiblement dépendantes*, Probab. Th; Relat. Fields 104 (1996), 255-282.
- [55] V.A. Rohlin, *On the fundamental ideas of measure theory*, Amer. Math. Soc. Translation 1952, (1952). no. 71, 55 pp.
- [56] J. Rousseau-Egele, *Un théorème de la limite locale pour une classe de transformations dilatantes et monotones par morceaux*, Ann. Probab. 11 (1983), no. 3, 772-788.
- [57] K. Schmidt, *On joint recurrence*, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 327, Série I, p. 837-842, 1998.
- [58] Y. Shalom, *Rigidity, unitary representations of semisimple groups, and fundamental groups of manifolds with rank one transformation group*, Ann. Math. (2), 152, 113-182, (2000).
- [59] M. Shub & A. Wilkinson, *Pathological foliations and removable zero exponents*, Invent. Math., 139 (2000), no. 3, 495-508.

- [60] J.G. Sinaï, *Markov partitions and C -diffeomorphisms*, *Funct. Anal. Appl.* 2, 61-82 (1968); translation from *Funkts. Anal. Prilozh.* 2, No.1, 64-89 (1968).
- [61] J.G. Sinaï, *The central limit theorem for geodesic flows on manifolds of constant negative curvature*, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 133, 1303–1306 (Russe); traduit en anglais dans *Soviet Math. Dokl.* 1 1960 983–987.
- [62] D. Volny : *Counter exemples to the central limit problem for stationary dependent random variables*. *Yokohama Math. J.* 36, No., 70-78 (1988).
- [63] S. Waddington, *Large deviation asymptotics for Anosov flows*, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 13, 1996, 4, 445–484.
- [64] L.-S. Young, *Statistical properties of dynamical systems with some hyperbolicity*. *Ann. of Math.*, vol. 147 (1998), 585–650.
- [65] L.-S. Young, *Devloppments in chaotic dynamics* *Notices Amer. Math. Soc.* 45 (1998), no. 10, 1318–1328.
- [66] L.-S. Young, *Recurrence times and rates of mixing*, *Isr. J. Math.* 110, 153–188 (1999).

TABLE DES MATIÈRES

1. Introduction	1
2. Le tlc pour les martingales et la méthode de Gordin	2
2.1. Le théorème de De Moivre-Laplace	2
2.2. La méthode de Gordin	5
2.3. Exemple 1 : le doublement d'angle	7
2.4. Exemple 2 : le chat d'Arnold	8
3. Autres théorèmes limite et autres exemples	13
3.1. Le principe d'invariance de Donsker	13
3.2. Construction de filtrations adéquates	18
3.3. Exemple 3 : le flot géodésique sur une surface compacte de courbure -1	18
3.4. Exemple 4 : les automorphismes ergodiques des tores	21
4. Le tlc pour le flot géodésique en courbure constante et une application géométrique	30
4.1. Exemple 5 : le flot géodésique en dimension d , en courbure constante dans le cas compact	31
4.2. Cobords et propriété d'accessibilité	40
4.3. Exemple 6 : le flot géodésique en dimension d , en courbure constante dans le cas géométriquement fini de volume fini	43
4.4. Exemple 7 : les flots sur les quotients compacts de $SL(d, \mathbb{R})$	44
4.5. Exemples d'applications géométriques	56
5. Un assouplissement de la méthode des martingales	58
5.1. Mélange et équidistribution : un nouveau point de vue	58
5.2. Tlc et mélange fort	62
6. Annexe : Décompositions de mesures selon une partition	67
Références	69