Feuille d'exercices 2

Exercice 1 Calculer les dérivées partielles à l'ordre 1 et 2 des fonctions suivantes :
a) $f(x,y) = 4x^2y + 2x^3 - 3xy + 2x + 1$
b) $f(x,y,z) = \ln(x+y) - 2x$
c) $f(u,v,w) = \sqrt{u+v} - 3w^\alpha$

Exercice 2
1) Posons $f(x,y,z) = 2x^2y - 3ye^z + x + 3y$. Calculer le gradient de f.
2) Posons $g(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (t, e^{-2t}, 3t)$. Calculer la dérivée de g.
3) Posons $F(t) = f(g(t)) = f(t, e^{-2t}, 3t)$. Calculer la dérivée de F.

Exercice 3 Considérons les fonctions suivantes :

$$x(u,v) = u^2 + v, \; y(u,v) = uv + 1, \; z(u,v) = v^2 - u,$$

$$f(x,y,z) = 2x^2 + xy - 3z^3.$$

Posons $F(u,v) = f(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$. Calculer les dérivées partielles de F par rapport à u et v.

Exercice 4 Calculer les taux de croissance instantanés des fonctions suivantes : $t, \; t^2, \; e^t, \; e^{3t}, \; e^{2t^2}$.

Exercice 5
1) Pour quelles valeurs de α et β la fonction

$$F(K,L) = K^\alpha L^\beta + 3K^\beta L^\alpha + 2K^{2/3} - L^{2/3}$$

est-elle homogène ?
2) Calculer les élasticités de F par rapport à K et L.
3) On se place en un point où les élsticités sont égales. Déterminer la valeur du taux de croissance instantané de F lorsque les taux de croissance instantanées des facteurs sont $T_K = 1.5\%$, $T_L = 1\%$.

Exercice 6 Utiliser la formule de Taylor à l'ordre 1 pour donner des valeurs approchées des fonctions suivantes au point $(0.1, 0.2, 0.15)$.
1) $f(x,y,z) = x^2 - 2y^5 + 4z^{10} - 3y + 2z + 2)$,
2) $g(x,y,z) = e^x - \ln(1+yz)$,
3) $h(x,y,z) = \sqrt{1 + 2x + y^2} - 3y + z^3 + (1+z+x)^{3/2}$.

Exercice 7 Soit la fonction de production $q = F(x,y,z) = x^{2/3}y^{1/2}z^{1/6}$.
1) Calculer $F(8, 16, 64)$. A l'aide de la formule de Taylor donner une valeur approchée de $F(7.7, 16, 65.2)$.
2) Calculer les élasticités de la production F par rapport à chacune des quantités x, y, z.
3) La fonction F est-elle homogène ? Que vaut $F(8000, 16000, 64000)$?
4) On suppose que x, y, z dépendent du temps. Calculer le taux de croissance instantané de la production F lorsque les taux de croissance instantanées des facteurs sont $T_x = 1.5\%$, $T_y = 2\%$, $T_z = 1,5\%$.

Exercice 8
1) Considérons la courbe du plan d'équation

$$x^2 + y^2 - 2x + 2y + 1 = 0.$$

Trouver un point de cette courbe. Donner l'équation de la tangente à la courbe en ce point. Reconnaître la courbe.
2) Même chose avec la courbe d'équation

$$2x^2 - y^2 - xy = 1.$$

Exercice 9
1) a) K et L désignent le facteur capital et le facteur travail évalués respectivement en monnaie nationale et en nombre d'emplois. La fonction de production est une fonction de Cobb-Douglas :

$$Q = aK^{\alpha}L^{1-\alpha}$$

($a > 0$ et $0 < \alpha < 1$ deux constantes). Quel est le taux marginal de substitution T du travail en capital ?

b) On désigne par $k = K/L$ le capital par tête, et on appelle élasticité de substitution le rapport

$$\sigma = \frac{\frac{dk}{k}}{\frac{dT}{T}} = \frac{d(Logk)}{d(LogT)}.$$

Montrer que dans le cas d'une fonction de Cobb-Douglas on a $\sigma = 1$.

2) a) Montrer qu'une fonction de production $Q = F(K, L)$ dont l'élasticité de substitution vaut 1, vérifie l'équation aux dérivées partielles :

$$K\frac{\partial Q}{\partial K} - pL\frac{\partial Q}{\partial L} = 0$$

(p constante positive).

b) Montrer que toute solution de l'équation précédente est de la forme $Q = f(K^pL)$ où f est une fonction de classe C^1.

c) En déduire que toute fonction de production qui est homogène de degré 1 et dont l'élasticité de substitution vaut 1 est nécessairement une fonction de Cobb-Douglas.

Exercice 10

Soit une fonction d'utilité où $u(q_1, q_2)$ dans laquelle q_1 et q_2 représentent les quantités de deux marchandises. Pour une valeur de $u = u_0$, plusieurs combinaisons sont possibles. Notons $T_{1,2}$ (resp. $T_{2,1}$) le taux marginal de substitution de q_1 en q_2 (resp. de q_2 en q_1).

a) Montrer que $T_{1,2}T_{2,1} = 1$.

b) Lorsque u est une fonction homogène de degré α des deux variables q_1 et q_2 montrer que $T_{1,2}$ est une fonction de q_1/q_2.

c) Application $u = q_1^2 + 2q_1q_2 + 4q_2^2$. Evaluer $T_{1,2}$ lorsque $q_1 = 2q_2$.

Exercice 11 On considère un pays producteur des marchandises m_1 et m_2 et dont la courbe des possibilités de production est donnée par :

$$x^2 + 80y \leq 1600$$

x et y représentant les quantités respectives de marchandises m_1 et m_2 qu'il peut produire. Sur le marché national les courbes d'indifférence de consommation sont données par :

$$xy = K.$$

Quelle politique de production faut-il adopter si l'on suppose l'absence de commerce international ?

(Une courbe d'indifférence de consommation est une courbe de niveau de la fonction d'utilité.)

Exercice 12 Écrire le développement de Taylor à l'ordre 2 en 0 des fonctions suivantes :
1) $f(t) = \ln(1 + t)$,
2) $g(u, v) = 1 + u^2 - e^{u+v}$,
3) $h(x, y, z) = \sqrt{1 + x + y} - ze^z + 2 - (x + y)^3$,
4) $k(x, y, z) = 1 + 2y - 3y^2 + 2xz - 3z^2$.

Exercice 13 Écrire le développement de Taylor à l'ordre 2 en $(0, 1, 1)$ de la fonction

$$f(x, y, z) = x^3 + y^2 - (x + z)^{2/3}.$$