Feuille d'exercices numéro 3

Exercice 1. Calculer les déterminants des matrices suivantes :
$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 2. Inverser les matrices suivantes :
$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Exercice 3. Calculer les valeurs propres des matrices suivantes :
$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ -3 & 9 & 4 \end{pmatrix}$.

Exercice 4. Soit le système :

$$\begin{aligned} mx + y - z &= a \\ x + my + z &= b \\ x + y + mz &= c \end{aligned}$$

dépendant des paramètres m, a, b, c.
a) Pour quels valeurs de m ce système admet-il une solution unique ? Préciser alors, grâce aux formules de Cramer, les expressions de x, y en fonction de a, b, c et m.
b) Si $m = -2$, quelles relations doivent vérifier a, b, c pour que le système ait des solutions ? Résoudre le système lorsqu'elles sont satisfaites.

Exercice 5. Soit A la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, et V le vecteur $V = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.
Calculer le produit AV. Déteminer les valeurs propres de V ainsi que des vecteurs propres associés. Pourquoi peut-on choisir des vecteurs propres formant une base orthonormée ? Quelle propriété intéressante a alors la matrice de passage ? En déduire l'expression de A^n en fonction de n.

Exercice 6. Étudier la nature des points stationnaires des deux fonctions suivantes :

$$f(x, y) = 4x^2y + 2x^3 - 4xy + 2x + 1, \quad g(x, y, z) = 1 + 2y - 3y^2 + 2xz - 3z^2.$$

Exercice 7. 1) Définir un ensemble convexe de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $Y_k = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \ y < k\}$ est un ensemble convexe de $\mathbb{R}^3$. On pourra noter de même $Y'_k = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \ y > k\}$. À l'aide du calcul matriciel, comment peut-on montrer qu'une fonction est concave ? Qu'apporte

la convexité ou la concavité pour l'étude des maximums d'une fonction ?
2) a)Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$f(x,y,z) = \frac{2}{3}y^3 - x^3 - \frac{3}{2}z^2 - 3xz + x + z - 2y - 3.$$

Déterminer un ensemble convexe C de $\mathbb{R}^3$ sur lequel f est concave ou convexe. Étudier la nature des points stationnaires et en déduire que f garde un signe constant sur C.
b) Écrire la formule de Taylor pour f à l'ordre 2 au point $(0, 1, 1/3)$. Ce point est-il un extremum ?
c) En utilisant les valeurs propres de la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & -4 & 0 \\ -3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, confirmer la nature d'un des points stationnaires de la question a).
d) Étudier les maximums de f sous la contrainte $x + z = b$.

Exercice 8. 1) Définir un ensemble convexe de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $X_k = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \ x > k\}$ est un ensemble convexe de $\mathbb{R}^3$. À l'aide du calcul matriciel, comment peut-on montrer qu'une fonction est concave ? Qu'apporte la convexité ou la concavité pour l'étude des maximums d'une fonction ?
2) a)Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$f(x,y,z) = x^2 e^{-x} + 2y^2 - 2yz + z^2 - 2y.$$

Déterminer un ensemble convexe C de $\mathbb{R}^3$ sur lequel f est concave ou convexe. Étudier la nature des points stationnaires et en déduire que f garde un signe constant sur C.
c) En utilisant les valeurs propres de la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, confirmer la nature d'un des points stationnaires de la question a).
3) a) Étudier les maximums de f sous la contrainte $2y + z = c$.
b) Montrer que le problème posé est équivalent à la recherche des extremums libres d'une fonction de deux variables que l'on précisera.

Exercice 9. La fonction de satisfaction d'un individu est donnée par :

$$S(x_1, x_2, x_3) = x_1^{3/2} + x_2^2 + x_3^2$$

où x_i désigne la quantité de bien i dont le prix est p_i. Soit R le revenu de l'individu $[\sum_{i=1}^n p_i x_i \leq R]$.
a) La satisfaction maximale ne peut-elle être atteinte que sur l'hyperplan du revenu, c'est-à-dire pour $\sum_{i=1}^n p_i x_i = R$?
b) Utiliser la méthode du multiplicateur de Lagrange pour déterminer ce maximum lorsque $p_1 = 9, p_2 = 3, p_3 = 2$? Que se passe-t-il lorsque $p_3 = 0$?