Feuille d'exercices 2

Exercice 1. 1) Trouver la différentielle de $f(x,y) = (x^2+y^2)^{1/2}$ en $(1,1)$.
2) Trouver la différentielle de $f(x,y) = 2x+3y$ en (x_0,y_0).

Exercice 2. 1) Posons $f(x,y,z) = 2x^3y - 2ye^z + x - 2y^2$. Calculer le gradient de f.
2) Posons $g(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (t, e^{-2t}, 3t)$. Calculer la dérivée de g.
3) Posons $F(t) = f(g(t)) = f(t, e^{-2t}, 3t)$. Calculer la dérivée de F.

Exercice 3. Calculer les taux de croissance instantanés des fonctions suivantes : $t,\ t^2,\ e^t,\ e^{3t},\ e^{2t^2}$.

Exercice 4. Soit $g(t) = f(x_0 + \alpha t, y_0 + \beta t)$. Calculer $g'(0)$.

Exercice 5. Soit f une fonction de deux variables à valeurs réelles dérivable. On pose $g(x,y) = f(x-y, y-x)$. Calculer $\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}$.

Exercice 6. Considérons les fonctions suivantes :

$$x(u,v) = u^2 - v^2,\ y(u,v) = uv - v,\ z(u,v) = v^2 + u,$$

$$f(x,y,z) = x^2 - xy - 3z^2.$$

Posons $F(u,v) = f(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$. Calculer les dérivées partielles de F par rapport à u et v.

Exercice 7. Calculer les dérivées partielles à l'ordre 1 et 2 des fonctions suivantes :
a) $f(x,y) = xy^2 - 4x^2 + 3x^3y + 2x - 4$
b) $f(x,y,z) = \ln(x^3+y) - 2x$
c) $f(u,v,w) = \sqrt{u-v} + 2w^\alpha$

Exercice 8. 1) Pour quelles valeurs de α et β la fonction

$$F(K,L) = K^\alpha L^\beta + 3K^\beta L^\alpha + 2K^{2/3} + L^{2/3}$$

est-elle homogène ?
2) Calculer les élasticités de F par rapport à K et L.
3) On suppose que F est homogène et on se place en un point où les élasticités sont égales. Déterminer la valeur du taux de croissance instantané de F lorsque les taux de croissance instantanés des facteurs sont $T_K = 1.5\%$, $T_L = 1\%$.

Exercice 9. Utiliser la formule de Taylor à l'ordre 1 pour donner des valeurs approchées des fonctions suivantes au point $(0.1, 0.2, 0.15)$.
1) $f(x,y,z) = x^2 - 2y^5 + 4z^{10} - 3y + 2z + 2)$,
2) $g(x,y,z) = e^x - \ln(1+yz)$,
3) $h(x,y,z) = \sqrt{1+2x+y^2} - 3y + z^3 + (1+z+x)^{3/2}$.

Exercice 10. Soit la fonction de production $q = F(x,y,z) = x^{2/3}y^{1/2}z^{1/6}$.
1) Calculer $F(8,16,64)$. A l'aide de la formule de Taylor donner une valeur approchée de $F(7.7, 16, 65.2)$.
2) Calculer les élasticités de la production F par rapport à chacune des quantités x, y, z.
3) La fonction F est-elle homogène ? Que vaut $F(8000, 16000, 64000)$?
4) On suppose que x, y, z dépendent du temps. Calculer le taux de croissance instantané de la production F lorsque les taux de croissance instantanés des facteurs sont $T_x = 1.5\%$, $T_y = 2\%$, $T_z = 1,5\%$.

Exercice 11. Soit f une fonction homogène de degré α.
1) Écrire ce que ça signifie : $f(tx_1, \dots, tx_n) = ...$
2) Dériver de deux façons les deux membres de la question 1) par rapport à t. En déduire l'identité d'Euler (prendre une valeur particulière de t).

Exercice 12. 1) Considérons la courbe du plan d'équation

$$x^2 + y^2 - 2x + 2y + 1 = 0.$$

Trouver un point de cette courbe. Donner l'équation de la tangente à la courbe en ce point. Reconnaître la courbe.
2) Même chose avec la courbe d'équation

$$2x^2 - y^2 - xy = 1.$$

Exercice 13. Trouver l'équation du plan tangent à la surface $S = \{(x, y, z) \mid xyz = 1\}$ en $(1, 1, 1)$.

Exercice 14. Trouver l'équation du plan tangent à la surface donnée par le graphe de $f(x, y) = x^2 + y^2$ au point (2,2,8).

Exercice 15. Soit une fonction d'utilité où $u(q_1, q_2)$ dans laquelle q_1 et q_2 représentent les quantités de deux marchandises. Pour une valeur de $u = u_0$, plusieurs combinaisons sont possibles. Notons $T_{1,2}$ (resp. $T_{2,1}$) le taux marginal de substitution de q_1 en q_2 (resp. de q_2 en q_1).
a) Montrer que $T_{1,2}T_{2,1} = 1$.
b) Lorsque u est une fonction homogène de degré α des deux variables q_1 et q_2 montrer que $T_{1,2}$ est une fonction de q_1/q_2.
c) Application $u = q_1^2 + 2q_1q_2 + 4q_2^2$. Evaluer $T_{1,2}$ lorsque $q_1 = 2q_2$.

Exercice 16. Soit la fonction de production $q = F(x, y, z) = x^{1/3}y^{1/2}z^{1/4}$.
On suppose que x, y, z dépendent du temps. Calculer le taux de croissance instantané de la production F lorsque les taux de croissance instantanés des facteurs sont $T_x = 1.5\%$, $T_y = 2\%$, $T_z = 1,5\%$.

Exercice 17. On considère un pays producteur des marchandises m_1 et m_2 et dont la courbe des possibilités de production est donnée par :

$$x^2 + 80y \leq 1600$$

x et y représentant les quantités respectives de marchandises m_1 et m_2 qu'il peut produire. Sur le marché national les courbes d'indifférence de consommation sont données par :

$$xy = K.$$

Quelle politique de production faut-il adopter si l'on suppose l'absence de commerce international ?
(Une courbe d'indifférence de consommation est une courbe de niveau de la fonction d'utilité.)

Exercice 18. Écrire le développement de Taylor à l'ordre 2 en 0 des fonctions suivantes :
1) $f(t) = \ln(1 - t)$,
2) $g(u, v) = 1 + 2v^2 - e^{u+v}$,
3) $h(x, y, z) = \sqrt{1 + x + y} - ze^z + 2 - (x + y)^2$,
4) $k(x, y, z) = 1 + 2y + 2y^2 + 2xz - 3z^2$.

Exercice 19. Écrire le développement de Taylor à l'ordre 2 en $(1, 1, 1)$ de la fonction

$$f(x, y, z) = x^3 - y^2 + (x + z)^{2/3}.$$