Feuille d'exercices 2

Exercice 1. Calculer les dérivées partielles à l'ordre 1 et 2 des fonctions suivantes :

a) $f(x, y) = xy^2 - 4x^2 + 3x^3y + 2x - 4$

b) $f(x, y, z) = \ln(x^3 + y) - 2x$

c) $f(u, v, w) = \sqrt{u - v} + 2w^\alpha$

Exercice 2. 1) Posons $f(x, y, z) = 2x^3y - 2ye^z + x - 2y^2$. Calculer le gradient de f .

2) Posons $g(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (t, e^{-2t}, 3t)$. Calculer la dérivée de g .

3) Posons $F(t) = f(g(t)) = f(t, e^{-2t}, 3t)$. Calculer la dérivée de F .

Exercice 3. Considérons les fonctions suivantes :

$$x(u, v) = u^2 - v^2, \quad y(u, v) = uv - v, \quad z(u, v) = v^2 + u,$$

$$f(x, y, z) = x^2 - xy - 3z^2.$$

Posons $F(u, v) = f(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$. Calculer les dérivées partielles de F par rapport à u et v .

Exercice 4. Calculer les taux de croissance instantanés des fonctions suivantes : $t, t^2, e^t, e^{3t}, e^{2t^2}$.

Exercice 5. 1) Pour quelles valeurs de α et β la fonction

$$F(K, L) = K^\alpha L^\beta + 3K^\beta L^\alpha + 2K^{2/3} + L^{2/3}$$

est-elle homogène ?

2) Calculer les élasticités de F par rapport à K et L .

3) On suppose que F est homogène et on se place en un point où les élasticités sont égales. Déterminer la valeur du taux de croissance instantané de F lorsque les taux de croissance instantanés des facteurs sont $T_K = 1.5\%$, $T_L = 1\%$.

Exercice 6. Utiliser la formule de Taylor à l'ordre 1 pour donner des valeurs approchées des fonctions suivantes au point $(0.1, 0.2, 0.15)$.

1) $f(x, y, z) = x^2 - 2y^5 + 4z^{10} - 3y + 2z + 2$,

2) $g(x, y, z) = e^x - \ln(1 + yz)$,

3) $h(x, y, z) = \sqrt{1 + 2x + y^2} - 3y + z^3 + (1 + z + x)^{3/2}$.

Exercice 7. Soit la fonction de production $q = F(x, y, z) = x^{2/3}y^{1/2}z^{1/6}$.

1) Calculer $F(8, 16, 64)$. A l'aide de la formule de Taylor donner une valeur approchée de $F(7.7, 16, 65.2)$.

2) Calculer les élasticités de la production F par rapport à chacune des quantités x, y, z .

3) La fonction F est-elle homogène ? Que vaut $F(8000, 16000, 64000)$?

4) On suppose que x, y, z dépendent du temps. Calculer le taux de croissance instantané de la production F lorsque les taux de croissance instantanés des facteurs sont $T_x = 1.5\%$, $T_y = 2\%$, $T_z = 1, 5\%$.

Exercice 8. 1) Considérons la courbe du plan d'équation

$$x^2 + y^2 - 2x + 2y + 1 = 0.$$

Trouver un point de cette courbe. Donner l'équation de la tangente à la courbe en ce point. Reconnaître la courbe.

2) Même chose avec la courbe d'équation

$$2x^2 - y^2 - xy = 1.$$

Exercice 9. Soit une fonction d'utilité où $u(q_1, q_2)$ dans laquelle q_1 et q_2 représentent les quantités de deux marchandises. Pour une valeur de $u = u_0$, plusieurs combinaisons sont possibles. Notons $T_{1,2}$ (resp. $T_{2,1}$) le taux marginal de substitution de q_1 en q_2 (resp. de q_2 en q_1).

a) Montrer que $T_{1,2}T_{2,1} = 1$.

b) Lorsque u est une fonction homogène de degré α des deux variables q_1 et q_2 montrer que $T_{1,2}$ est une fonction de q_1/q_2 .

c) Application $u = q_1^2 + 2q_1q_2 + 4q_2^2$. Evaluer $T_{1,2}$ lorsque $q_1 = 2q_2$.

Exercice 10. Soit la fonction de production $q = F(x, y, z) = x^{1/3}y^{1/2}z^{1/4}$.

On suppose que x, y, z dépendent du temps. Calculer le taux de croissance instantané de la production F lorsque les taux de croissance instantanés des facteurs sont $T_x = 1.5\%$, $T_y = 2\%$, $T_z = 1,5\%$.

Exercice 11. On considère un pays producteur des marchandises m_1 et m_2 et dont la courbe des possibilités de production est donnée par :

$$x^2 + 80y \leq 1600$$

x et y représentant les quantités respectives de marchandises m_1 et m_2 qu'il peut produire. Sur le marché national les courbes d'indifférence de consommation sont données par :

$$xy = K.$$

Quelle politique de production faut-il adopter si l'on suppose l'absence de commerce international ? (Une courbe d'indifférence de consommation est une courbe de niveau de la fonction d'utilité.)

Exercice 12. Écrire le développement de Taylor à l'ordre 2 en 0 des fonctions suivantes :

1) $f(t) = \ln(1 - t)$,

2) $g(u, v) = 1 + 2v^2 - e^{u+v}$,

3) $h(x, y, z) = \sqrt{1+x+y} - ze^z + 2 - (x+y)^2$,

4) $k(x, y, z) = 1 + 2y + 2y^2 + 2xz - 3z^2$.

Exercice 13. Écrire le développement de Taylor à l'ordre 2 en $(1, 1, 1)$ de la fonction

$$f(x, y, z) = x^3 - y^2 + (x+z)^{2/3}.$$