Feuille d'exercices 1

Exercice 1. Calculer les produits des matrices A et B dans les cas suivants.
1) $A = B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,
2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$,
3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,
4) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
5) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 2. Vérifier que $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 3. Une usine fabrique deux produits, A et B. Chaque produit contient quatre matières différentes W, X, Y, Z. La fabrication de chaque unité de chaque matière nécéssite trois forme d'énergie, électricité, gaz, pétrole. Les deux tableaux suivants présentent les nombres d'unités nécessaires d'énergie pour produire une unité de chaque matière, les quantités de matières nécessaires pour produire une unité de chaque produit A et B. Utiliser la multiplication matricielle pour exprimer les quantités d'énergie nécessaires à la production d'une unité de chaque produit.

	W	X	Y	Z
A	2	3	1	1
B	4	2	0	1

	Electricité	Pétrole	Gaz
W	5	3	6
X	1	0	1
Y	0	4	0
Z	3	0	4

Exercice 4. Même chose avec trois produits finaux A, B, C et trois matières intermédiaires X, Y, Z. Les données étant présentées dans les tableaux suivants.

	A	B	C
X	2	3	1
Y	0	2	0
Z	1	2	1

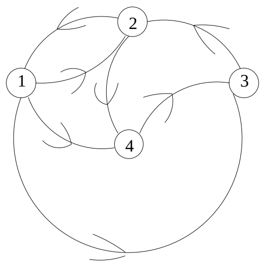
	Electricité	Pétrole	Gaz
X	5	2	1
Y	0	2	1
Z	0	2	2

Exercice 5. L'économiste américain Wassily Leontief (1905-1999), prix Nobel d'économie en 1973, s'est intéressé au problème suivant : quelle doit être la production de chaque secteur d'une économie de sorte à ce que la demande totale soit satisfaite. Nous considérons ici un exemple très simple d'analyse entrée-sortie, une économie avec deux secteurs A et B. Supposons que la demande des consommateurs pour ses produits soit respectivement 1000 et 780 millions d'euros par année. Quelles productions a et b (en millions d'euros par an) doivent fournir les deux secteurs pour satisfaire la demande ? Vous pouvez être tentés de dire 1000 et 780, respectivement, mais les choses ne sont pas si simple que ça. Nous devons aussi prendre en compte la demande d'un secteur à l'autre. Supposons que le secteur A produise de l'électricité.

Bien sûr, la production d'à peu près n'importe quel bien requiert de l'électricité. Supposons que le secteur B nécessite 10 centimes d'euro d'électricité par euros que B produit, et que l'industrie A a besoin de 20 centimes d'euro de biens de B par euros de production. Déterminez les productions a et b qui permettent de satisfaire à la fois la demande des consommateurs et la demande interindustrielle.

Exercice 6. Lors de votre dernier voyage en Suisse vous avez pris le bateau pour faire un aller-retour entre Rheinfall et Rheinau. L'aller a pris 20 minutes et le retour 40 minutes. La distance entre Rheinfall et Rheinau est de 8 kilomètres. À quelle vitesse navigue le bateau (par rapport à l'eau) et à quelle vitesse s'écoule la rivière ? Nous supposerons que ces deux vitesses sont constantes le temps du trajet.

Exercice 7. Grâce au calcul matriciel (et à la calculatrice) donner le nombre de chemins de longueur 7 allant de 1 à 3 dans le graphe suivant. Combien y-a-t-il de chemins de longueur 5 en tout ?



Exercice 8. Prendre deux matrices carrées 2x2 A et B au hasard et calculer AB et BA.

Exercice 9. Soit A une matrice 3x3. Écrire sous forme matricielle l'opération qui consiste à ajouter la première colonne multipliée par 3 à la troisième colonne.

Exercice 10. Écrire sous forme matricielle le sytème d'équations linéaires suivant :

$$2x + 3y - 3z + 2t = 5$$
$$x - 3y - z + t = -1$$
$$2x + y + z - t = 2$$

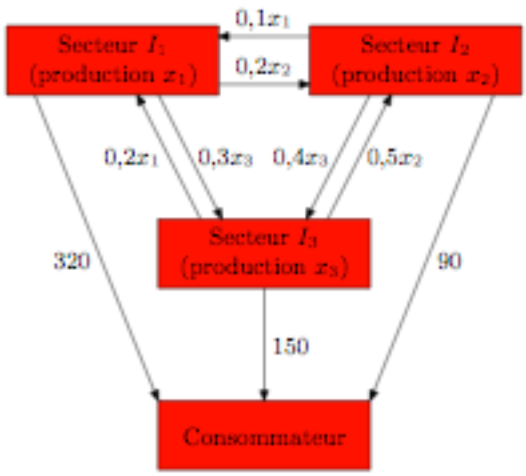
Exercice 11. On considère le système d'équations suivant :

$$3x_1 + x_2 = y_1$$
$$x_1 - x_2 = y_2$$

Exprimer y_1 et y_2 en fonction de x_1 et x_2. En déduire l'inverse de la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 12. Inverser la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ en utilisant les opérations sur les lignes. Recommencer avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 13. 1) Considérons une économie avec trois secteurs industriels, I1 , I2 , I3 . Quelles quantités x1 , x2 , x3 doivent-elles produire pour satisfaire à la fois la demande des consommateurs et celle des autres secteurs ? La demande requise de chaque secteur est représentée sur la figure ci-dessous.



2) Lorsqu'on considère un modèle entrée-sortie avec plus de trois secteurs industriels, il devient malaisé de représenter les demandes par un diagramme comme celui de la question précédente. Supposons qu'il y ait des secteurs $I_1, \dots, I_n$, de productions $x_1, ..., x_n$. Le vecteur de production est

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}$$

Le vecteur de demande des consommateurs est

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{pmatrix},$$

où b_i est la demande des consommateurs sur le secteur I_i. Le vecteur de demande pour le secteur I_j est

$$v_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{nj} \end{pmatrix},$$

où a_{ij} est la demande du secteur I_j au secteur I_i , par euro de production du secteur I_j.
a) Trouver les quatre vecteurs de demandes pour l'économie de la question 1).
b) Quelle est la signification économique de $x_j v_j$?
c) Quelle est la signification économique de $x_1v_1 + x_2v_2 + \ldots + x_nv_n + b$?
d) Quelle est la signification économique de l'équation $x_1v_1 + x_2v_2 + \ldots + x_nv_n + b = x$?
3) Considérons l'économie d'Israël en 1958. Les trois secteurs industriels considérés sont : I_1 agriculture, I_2 biens manufacturés, I_3 énergie. Production et demande sont mesurés en millions de livres israéliennes, la monnaie d'Israël à cette époque. On nous dit que

$$b = \begin{pmatrix} 13,2 \\ 17,6 \\ 1,8 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 0,293 \\ 0,014 \\ 0,044 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,207 \\ 0,001 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,017 \\ 0,216 \end{pmatrix}$$

a) Pourquoi la première composante des vecteurs v_2 et v_3 est-elle nulle ?
b) Trouver les productions x_1, x_2, x_3 qui satisfont la demande.

Exercice 14. Une économie est structurée en trois secteurs 1, 2, 3. Chaque secteur utilise des consommations intermédiaires de production des autres pour travailler. Pour produire une unité, le secteur 1 utilise 0 unité de production du secteur 2, 0,1 du secteur 3. Pour produire une unité, le secteur 2 utilise 0,2 unité de production du secteur 1, 0 du secteur 3. Pour produire une unité, le secteur 3 utilise 0,1 unité de production du secteur 1, 0 du secteur 2.
1) Donner la matrice de technologie associée à cette économie.
2) Si la demande pour les produits du secteur 1 est 1, celle pour le secteur 2 est 2 et celle pour le secteur 3 est 1, quelles doivent-être les productions brutes de chacun des secteurs ? (On pourra prendre $1/0,99 = 1,01$ et arrondir à deux chiffres après la virgule)

Exercice 15. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0,2 & 0,2 \\ 0,1 & 0 & 0,1 \\ 0,1 & 0,1 & 0 \end{pmatrix}$ une matrice de technologie. Trouver les valeurs de production brute quand la demande est $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 16. Écrire sous forme matricielle les formes quadratiques suivantes :

$$Q(x, y, z, t) = x^2 - 2y^2 + 3xy + 2z^2 - 3xz + 4zt - 8xt + t^2,$$

$$Q(a, b, c) = 2ab - 6bc + 8ac.$$

Exercice 17. Écrire sous forme de la multiplication par une matrice (quand c'est possible) les applications de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ suivantes :
a) $f(x, y, z) = (2x + 6y - 5z, 3x^2 + 2y)$
b) $f(x, y, z) = (2x + 6y - 5z, 3x + 2y + 3z)$
c) $f(x, y, z) = (x + 6y, 3x + 2y)$

Exercice 18. Considérons les matrices

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

a) Vérifier qu'on a $B = A + 4I_3$.
b) Trouver une formule liant B et B^2.
c) Trouver une relation entre A, A^2 et I_3.
d) Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 19. Posons

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Calculer $A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A^2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, puis $A^n\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ pour un entier n quelconque. Faire la même chose avec le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ à la place du vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
b) Écrire $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ comme une combinaison linéaire des deux vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
c) En déduire $A^n\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ puis l'expression de A^n.