Feuille d'exercices numéro 1

Exercice 1. Calculer les produits des matrices A et B dans les cas suivants.
1) $A = B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,
2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$,
3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,
4) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
5) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 2. Vérifier que $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 3. Une usine fabrique deux produits, A et B. Chaque produit contient quatre matières différentes W, X, Y, Z. La fabrication de chaque unité de chaque matière nécéssite trois forme d'énergie, électricité, gaz, pétrole. Les deux tableaux suivants présentent les nombres d'unités nécessaires d'énergie pour produire une unité de chaque matière, les quantités de matières nécessaires pour produire une unité de chaque produit A et B. Utiliser la multiplication matricielle pour exprimer les quantités d'énergie nécessaires à la production d'une unité de chaque produit.

	W	X	Y	Z
A	2	3	1	1
B	4	2	0	1

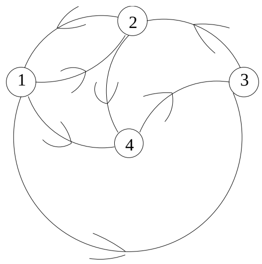
	Electricité	Pétrole	Gaz
W	5	3	6
X	1	0	1
Y	0	4	0
Z	3	0	4

Exercice 4. Même chose avec trois produits finaux A, B, C et trois matières intermédiaires X, Y, Z. Les données étant présentées dans les tableaux suivants.

	A	B	C
X	2	3	1
Y	0	2	0
Z	1	2	1

	Electricité	Pétrole	Gaz
X	5	2	1
Y	0	2	1
Z	0	2	2

Exercice 5. Grâce au calcul matriciel (et à la calculatrice) donner le nombre de chemins de longueur 7 allant de 1 à 3 dans le graphe suivant. Combien y-a-t-il de chemins de longueur 5 en tout ?



Exercice 6. Prendre deux matrices carrées 2x2 A et B au hasard et calculer AB et BA.

Exercice 7. Soit A une matrice 3x3. Écrire sous forme matricielle l'opération qui consiste à ajouter la première colonne multipliée par 3 à la troisième colonne.

Exercice 8. Écrire sous forme matricielle le sytème d'équations linéaires suivant :

$$2x + 3y - 3z + 2t = 5$$
$$x - 3y - z + t = -1$$
$$2x + y + z - t = 2$$

Exercice 9. On considère le système d'équations suivant :

$$3x_1 + x_2 = y_1$$
$$x_1 - x_2 = y_2$$

Exprimer y_1 et y_2 en fonction de x_1 et x_2. En déduire l'inverse de la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 10. Inverser la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ en utilisant les opérations sur les lignes.

Recommencer avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 11. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0,2 & 0,2 \\ 0,1 & 0 & 0,1 \\ 0,1 & 0,1 & 0 \end{pmatrix}$ une matrice de technologie. Trouver les valeurs de production brute quand la demande est $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 12. Une économie est structurée en trois secteurs 1, 2, 3. Chaque secteur utilise des consommations intermédiaires de production des autres pour travailler. Pour produire une unité, le secteur 1 utilise 0 unité de production du secteur 2, 0,1 du secteur 3. Pour produire une unité, le secteur 2 utilise 0,2 unité de production du secteur 1, 0 du secteur 3. Pour produire une unité, le secteur 3 utilise 0,1 unité de production du secteur 1, 0 du secteur 2.
1) Donner la matrice de technologie associée à cette économie.
2) Si la demande pour les produits du secteur 1 est 1, celle pour le secteur 2 est 2 et celle pour le secteur 3 est 1, quelles doivent-être les productions brutes de chacun des secteurs ? (On pourra prendre $1/0,99 = 1,01$ et arrondir à deux chiffres après la virgule)

Exercice 13. Écrire sous forme matricielle les formes quadratiques suivantes :

$$Q(x,y,z,t) = x^2 - 2y^2 + 3xy + 2z^2 - 3xz + 4zt - 8xt + t^2,$$

$$Q(a,b,c) = 2ab - 6bc + 8ac.$$

Exercice 14. Écrire sous forme de la multiplication par une matrice (quand c'est possible) les applications de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ suivantes :
a) $f(x,y,z) = (2x + 6y - 5z, 3x^2 + 2y)$
b) $f(x,y,z) = (2x + 6y - 5z, 3x + 2y + 3z)$
c) $f(x,y,z) = (x + 6y, 3x + 2y)$

Exercice 15. Considérons les matrices

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

a) Vérifier qu'on a $B = A + 4I_3$.
b) Trouver une formule liant B et B^2.
c) Trouver une relation entre A, A^2 et I_3.
d) Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 16. Posons

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Calculer $A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A^2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, puis $A^n\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ pour un entier n quelconque. Faire la même chose avec le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ à la place du vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
b) Écrire $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ comme une combinaison linéaire des deux vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
c) En déduire $A^n\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ puis l'expression de A^n.