Feuille d'exercices numéro 1

Exercice 1. Les consommateurs de trois produits sont répartis respectivement en 60% pour P1, 30% pour P2 et 10% pour P3. Après chaque mois, 70% reste fidèle à P1 contre 80% à P2 et 95% à P3. Les autres se réorientent entre les deux autres produits, moitié vers l'un, moitié vers l'autre.
1) Calculer les parts de marché de chacun des produits au bout de un mois, deux mois, trois mois.
2) Avec une calculatrice maniant les matrices, au bout de quinze mois, cinquante mois.
3) Que se passe-t-il si tous les clients restent fidèles à leur choix de départ à 100% ? Si les clients de P3 restent fidèles à leur choix à 100% et les autres seulement à 90% ?

Exercice 2. Calculer les produits des matrices A et B dans les cas suivants.
1) $A = B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$,
2) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$,
3) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.
4) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
5) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 3. Une usine fabrique deux produits, A et B. Chaque produit contient quatre matières différentes W, X, Y, Z. La fabrication de chaque unité de chaque matière nécéssite trois forme d'énergie, électricité, gaz, pétrole. Les deux tableaux suivants présentent les nombres d'unités nécessaires d'énergie pour produire une unité de chaque matière, les quantités de matières nécessaires pour produire une unité de chaque produit A et B. Utiliser la multiplication matricielle pour exprimer les quantités d'énergie nécessaires à la production d'une unité de chaque produit.

	W	X	Y	Z
A	2	3	1	1
B	4	2	0	1

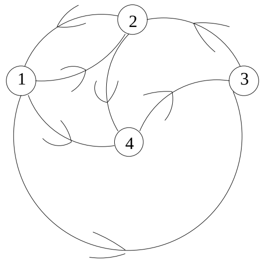
	Electricité	Pétrole	Gaz
W	5	3	6
X	1	0	1
Y	0	4	0
Z	3	0	4

Exercice 4. Même chose avec trois produits finaux A, B, C et trois matières intermédiaires X, Y, Z. Les données étant présentées dans les tableaux suivants.

	A	B	C
X	2	3	1
Y	0	2	0
Z	1	2	1

	Electricité	Pétrole	Gaz
X	5	2	1
Y	0	2	1
Z	0	2	2

Exercice 5. Donner le nombre de chemins de longueur 2 allant de 1 à 3 dans le graphe suivant. Combien y-a-t-il de chemins de longueur 3 allant de 1 à 3 ? Combien y-a-t-il de chemins de longueur 8 allant de 1 à 3 ? Combien y-a-t-il de chemins de longueur 5 en tout ? Combien y-a-t-il de chemins de longueur 42 en tout ? Se rendre compte que le calcul matriciel est très utile (la calculatrice aussi) pour répondre à ce genre de question quand les nombres considérés sont grands.



Exercice 6. Soit A une matrice 3x3. Écrire sous forme matricielle l'opération qui consiste à ajouter la première colonne multipliée par 3 à la troisième colonne.

Exercice 7. Vérifier que $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 8. Résoudre le sytème d'équations linéaires suivant :

$$\begin{aligned} &2x + 3y - 3z = 5 \\ &x - 3y - z = -1 \\ &2x + y + z = 2 \end{aligned}$$

L'écrire sous forme matricielle.

Exercice 9. Un magazin vend deux types d'articles. Lorsque leurs prix unitaires sont P_1 et P_2, les quantités demandées pour chaque produit, D_1 et D_2, et les quantités disponibles de chaque produit (l'offre), S_1 et S_2, sont reliées par les équations

$$\begin{aligned} &D_1 = 70 - 2P_1 + P_2 \\ &D_2 = 105 + P_1 - P_2 \\ &S_1 = -14 + 3P_1 \\ &S_2 = -7 + 2P_2. \end{aligned}$$

1) Les deux articles sont-ils en compétition (comme le sont une Volvo et une BMW) ou sont-ils complémentaires (tels une chemise et une cravate) ?
2) Trouvez les prix d'équilibre de chaque produit, c'est-à-dire ceux pour lesquels l'offre et la demande sont égales.

Exercice 10. Un modèle d'économie simple et irréaliste.
Il y a n producteurs $P_1, \dots, P_n$.
b) Il y a n biens $B_1, \dots, B_n$.
c) Le bien G_i est produit par le producteur P_i.
d) On considère une période fixe (disons un an).
e) Chaque producteur produit une unité de son produit (choix d'unité arbitraire).
f) Pour produire le bien G_i le producteur P_i a besoin des autres biens. Nous désignons par $a_{i,j}$ la quantité de bien G_i nécessaire à la production d'une unité du produit G_j.
g) Nous supposons que l'économie est fermée (pas d'échange avec l'extérieur).
h) Nous supposons que tous les biens produits sont utilisés.
Le producteur P_i vend son produit au prix π_i.
1) Écrire mathématiquement que chaque producteur ne dépense pas plus qu'il ne reçoit.
2) Montrer que pour qu'aucun producteur ne fasse de déficit il faut que le bénéfice de tous soit nul. Commencer par le cas de deux producteurs.
3) Dans le cas de deux producteurs qui échangent réellement, montrer qu'il est possible de déterminer des prix assurant l'absence de déficit.

Exercice 11. Soit A une matrice carrée $n \times n$ ($n \geq 2$) dont les coefficients sont tous positifs et telle que les sommes des éléments des colonnes soient égales à 1. Notons d le plus petit coefficient de A.

1) Montrer que d est strictement inférieur à $1/2$.
Pour tout Y vecteur $1 \times n$ dont les coefficients sont positifs ou nuls, notons $m(Y)$ le plus petit coefficient de Y, $M(Y)$ le plus grand.
2) Montrer que pour tout Y vecteur ligne positif ou nul on a

$$M(YA) - m(YA) \leq (1-2d)(M(Y) - m(Y)).$$

3) En déduire que YA^n converge vers un vecteur ligne dont toutes les coordonnées sont égales entre elles.
4) En déduire que A^n converge vers une matrice dont toutes les colonnes sont égales, puis que l'équation $AX = X$ a une solution X positive. (Cela montre que le problème de fixation de prix de l'exercice précédent a une solution et explique la stabilisation des parts de marché de l'exercice 1).

Exercice 12. On considère le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &= y_1 \\ x_1 - x_2 &= y_2 \end{aligned}$$

Exprimer y_1 et y_2 en fonction de x_1 et x_2. En déduire l'inverse de la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

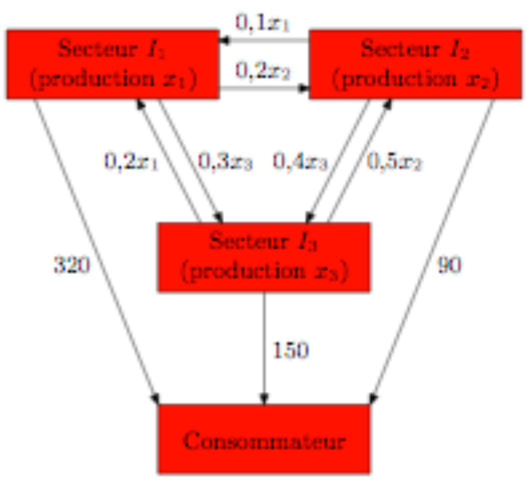
Exercice 13. Inverser la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ en utilisant les opérations sur les lignes. Recommencer avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 14. 1) Les trois vecteurs suivants engendrent-ils $\mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} ?$$

2) Donner un exemple de famille de 3 vecteurs non colinéaires deux à deux n'engendrant pas $\mathbb{R}^3$.
3) Soient v_1 et v_2 deux vecteurs non colinéaires. Montrer que si v_3 n'appartient pas à $Vect(v_1, v_2)$ alors v_1, v_2, v_3 engendrent $\mathbb{R}^3$.

Exercice 15. 1) Considérons une économie avec trois secteurs industriels, I1 , I2 , I3. Quelles quantités x1 , x2 , x3 doivent-elles produire pour satisfaire à la fois la demande des consommateurs et celle des autres secteurs ? La demande requise de chaque secteur est représentée sur la figure ci-dessous.



2) Lorsqu'on considère un modèle entrée-sortie avec plus de trois secteurs industriels, il devient malaisé de représenter les demandes par un diagramme comme celui de la question précédente. Supposons qu'il y ait des secteurs $I_1, \ldots, I_n$, de productions $x_1, ..., x_n$. Les vecteurs de production x et de demande des consommateurs b sont

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{pmatrix},$$

où b_i est la demande des consommateurs sur le secteur I_i. Le vecteur de demande pour le secteur I_j est

$$v_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{nj} \end{pmatrix},$$

où a_{ij} est la demande du secteur I_j au secteur I_i , par euro de production du secteur I_j.
a) Trouver les quatre vecteurs de demandes pour l'économie de la question 1).
b) Quelle est la signification économique de $x_j v_j$?
c) Quelle est la signification économique de $x_1v_1 + x_2v_2 + \ldots + x_nv_n + b$?
d) Quelle est la signification économique de l'équation $x_1v_1 + x_2v_2 + \ldots + x_nv_n + b = x$?
3) Considérons l'économie d'Israël en 1958. Les trois secteurs industriels considérés sont : I_1 agriculture, I_2 biens manufacturés, I_3 énergie. Production et demande sont mesurés en millions de livres israéliennes, la monnaie d'Israël à cette époque. On nous dit que

$$b = \begin{pmatrix} 13,2 \\ 17,6 \\ 1,8 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 0,293 \\ 0,014 \\ 0,044 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,207 \\ 0,001 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,017 \\ 0,216 \end{pmatrix}$$

a) Pourquoi la première composante des vecteurs v_2 et v_3 est-elle nulle ?
b) Trouver les productions x_1, x_2, x_3 qui satisfont la demande.

Exercice 16. Une économie est structurée en trois secteurs 1, 2, 3. Chaque secteur utilise des consommations intermédiaires de production des autres pour travailler. Pour produire une unité, le secteur 1 utilise 0 unité de production du secteur 2, 0,1 du secteur 3. Pour produire une unité, le secteur 2 utilise 0,2 unité de production du secteur 1, 0 du secteur 3. Pour produire une unité, le secteur 3 utilise 0,1 unité de production du secteur 1, 0 du secteur 2.
1) Donner la matrice de technologie associée à cette économie.
2) Si la demande pour les produits du secteur 1 est 1, celle pour le secteur 2 est 2 et celle pour le secteur 3 est 1, quelles doivent-être les productions brutes de chacun des secteurs ? (On pourra prendre $1/0,99 = 1,01$ et arrondir à deux chiffres après la virgule)

Exercice 17. Écrire sous forme matricielle les formes quadratiques suivantes :

$$Q(x, y, z, t) = x^2 - 2y^2 + 3xy + 2z^2 - 3xz + 4zt - 8xt + t^2,$$

$$Q(a, b, c) = 2ab - 6bc + 8ac.$$

Exercice 18. Écrire sous forme de la multiplication par une matrice (quand c'est possible) les applications de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ suivantes :
a) $f(x, y, z) = (2x + 6y - 5z, 3x^2 + 2y)$
b) $f(x, y, z) = (2x + 6y - 5z, 3x + 2y + 3z)$
c) $f(x, y, z) = (x + 6y, 3x + 2y)$