Feuille 4

Exercice 1. Déterminer tous les extrema locaux et absolus ainsi que les points selle de la fonction $f(x,y) = x^2y^2 - x^2 - y^2$.

Exercice 2. Déterminer tous les extrema locaux et absolus ainsi que les points selle de la fonction $f(x,y) = xy(1 - x^2 - y^2)$ sur le carré $\{(x,y) \,|\, 0 \leqslant x \leqslant 1 \ , \ 0 \leqslant y \leqslant 1\}$.

Exercice 3. Considérer la fonction $f(x,y) = x^3 - 3x^2 + y^2$.

1. Déterminer les points critiques de f ainsi que leur nature.
2. Trouver les extrema de f sur le carré $\{(x,y) \mid -2 \leqslant x, y \leqslant 2\}$.

Exercice 4. On considère une série bivariée $(x_i, y_i)_{i=1}^n$. On cherche à déterminer une droite qui approche au mieux le nuage de points du plan correspondant. Une possibilité est de rechercher les coefficients a et b tels que la quantité

$$F(a,b) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)^2$$

soit minimale.

1. Déterminer les points critiques de F ainsi que leur nature.
2. Pourquoi la fonction F a-t-elle un minimum global au point critique identifié ?

Exercice 5. Trouver le ou les points critiques de la fonction définie par $f(x,y,z) = x^2 - 2yz - 2x + 1$. La fonction f a-t-elle des extrema en ce ou ces points critiques ?

Exercice 6. Étudier la nature des points critiques de la fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ par $f(x,y,z) = x^3z + x^2y^2 - x^2 - y^2 - 4xz$.

Exercice 7. Trouver les points de $\mathbb{R}^2$ tels que $f(x,y) = (x^2 - y^2 \, , \, 2xy)$ soit localement inversible.

Exercice 8. Montrer que $f(x,y) = x\,e^y - y + 1 = 0$ définit une fonction $y = \varphi(x)$ implicitement en $(-1, 0)$ et calculer $\varphi'(-1)$.

Exercice 9. Considérons la fonction $f(u,v) = (x,y)$ avec $x = (v^2 - u^2)/2$ et $y = uv$.
1. Déterminer en quels points cette fonction est localement inversible.
2. Nous observons que $f(1,2) = (\frac{3}{2}, 2)$ et que f est localement inversible en $(1,2)$. Dans un voisinage de $(u,v) = (1,2)$ on peut donc écrire $u = u(x,y)$ et $v = v(x,y)$. Donner les valeurs de $\partial u/\partial x, \partial u/\partial y, \partial v/\partial x$ et $\partial v/\partial y$ au point $(\frac{3}{2}, 2)$.

Exercice 10. La température sur la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ est donnée par $T(x,y,z) = 2 + xz + y^2$.
Trouver les points les plus chauds et ceux les plus froids.

Exercice 11. Cet exercice a pour but de démontrer l'inégalité arithmético-géométrique :

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} \leqslant \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \quad \text{pour des nombres} \ \ a_i \geqslant 0$$

1. Utiliser la méthode de Lagrange pour trouver la valeur maximale de $f(x_1\,,\,\dots\,,\,x_n) = x_1^2 \cdots x_n^2$ sur la sphère de rayon $r > 0$: $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = r^2$. Pourquoi f admet-elle une valeur maximale ?
2. Déduire de la question précédente que $x_1^2 \cdots x_n^2 \leqslant \left(\dfrac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{n}\right)^n$.
3. En déduire l'inégalité arithmético-géométrique.

Exercice 12. Trouver la valeur maximale de $f(x, y, z) = x+z$ sur la sphère $x^2+y^2+z^2 = 1$ (par la méthode de Lagrange).

Exercice 13. Les revenus de trois ménages sont : 2, 1, 1. Leurs fonctions d'utilité sont toutes identiques : $x \mapsto \sqrt{x}$. On souhaite distribuer une unité de revenu supplémentaire. Comment faut-il la répartir entre les trois ménages pour que la somme des utilités soit la plus grande possible ?

Exercice 14. On considère un ensemble de n agents économiques. Ils ont tous la même fonction d'utilité $x \mapsto x^\alpha$. Pour quelle répartition des revenus la somme des fonctions d'utilité est-elle maximale ?