Feuille 2

Exercice 1. Donner l'ensemble de définition et l'image de $f(x, y) = \dfrac{x}{x^2 - y^2}$.

Exercice 2. Dessiner le graphe de $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$.

Exercice 3. Dessiner le graphe de $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4x - 6y + 13$.

Exercice 4. Tracer les courbes de niveau pour les fonctions suivantes :

(a) $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ (on pourra utiliser les coordonnées polaires)

(b) $f(x, y) = x^2 - y^2$

(c) $f(x, y) = e^{xy}$

Exercice 5. On considère la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x\,,\,y) = \frac{2x + 2y}{x^2 + y^2 + 2}.$$

Représenter les courbes de niveau de f. Déterminer les extrema de f.

Exercice 6. Montrer que la fonction f définie par $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$ est continue en $(0, 0)$.

Exercice 7. Si $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sont continues, montrer que $f + g$ est continue.

Exercice 8. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction ayant la propriété : "$f^{-1}(I)$ est ouvert pour tout intervalle ouvert I dans $\mathbb{R}$". Montrer que f est continue.

Exercice 9. On considère une fonction f de deux variables définie par la formule

$$f(x, y) = \sqrt{1 + x + y}.$$

Décrire la partie de $\mathbb{R}^2$ la plus grande sur laquelle cette formule a un sens. On considère que f est définie sur cette partie. Décrire l'image réciproque $E = f^{-1}(]-1, 1[)$. L'ensemble E est-il ouvert dans $\mathbb{R}^2$?

Exercice 10. Soient $X \subset \mathbb{R}^n$ compact, $f : X \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que $f(X) \subset \mathbb{R}$ est compact.

Exercice 11. On considère la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x\,,\,y) = \sup\left\{\frac{x}{1 + |y|}, \frac{y}{1 + |x|}\right\}.$$

Cette fonction est-elle continue ? Est-elle bornée ?

Exercice 12. Pour chacune des applications suivantes de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, donner son domaine de définition et dire (en le justifiant) si elle admet un prolongement continu sur $\mathbb{R}^2$. (Indication : dans plusieurs cas, on peut utiliser des coordonnées polaires.)

$$f_1(x\,,\,y) = \frac{x+y}{x^2+y^2} \qquad f_2(x\,,\,y) = y\sin x \qquad f_3(x\,,\,y) = (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}$$

$$f_4(x\,,\,y) = y\sin\frac{1}{x} \qquad f_5(x\,,\,y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} \qquad f_6(x\,,\,y) = \frac{y}{x^2}e^{-\frac{|y|}{x^2}}$$

Exercice 13. Soit E l'ensemble des éléments $(x\,,\,y)$ de $\mathbb{R}^2$ vérifiant $1 \leqslant |x| + |y| \leqslant 2$.
Montrer que E est compact.
La formule $f(x\,,\,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$ définit-elle sur E une fonction continue ?
Trouver les points où f atteint sa borne supérieure et sa borne inférieure.

Exercice 14. Trouver les extrema de la fonction $f(x,y) = x^2 + 2y^2 + 1$ sur $\mathbb{R}^2$, puis sur l'ensemble

$$\{(x,y)\ /\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + 2y = 10\}.$$

Exercice 15. Montrer que l'application définie par :
$f(x\,,\,y) = \dfrac{x^4}{y(y-x^2)}$ si $y \neq 0$ et $y - x^2 \neq 0$
$f(x\,,\,y) = 0$ si $y = 0$ ou si $y - x^2 = 0$

n'est pas continue en $(0\,,\,0)$ mais que ses restrictions à toute droite passant par l'origine sont continues en ce point.

Exercice 16. Lesquels des sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$ sont ouverts ?

(a) $\{(x,y) \mid |x| < 1 \text{ et } |y| < 1\}$
(b) $\{(x,y) \mid xy \leq 1\}$
(c) $\{(x,y) \mid y > x^2 \text{ et } 0 \leq |x| < 2\}$
(d) $\{(x,y) \mid x > y\}$
(e) $\{(x,y) \mid x^2 - 3xy < y^2\}$

Justifier les réponses en utilisant un théorème sur les fonctions continues.

Exercice 17. Montrer que l'ensemble

$$E = \{(x,y,z)\ /\ 3x^4 + 2y^8 + z^2 = 1\}$$

est un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^3$. L'ensemble

$$F = \{(x,y,z)\ /\ x^3 + 2y^2 + z^2 = 1\}$$

est-il un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 18. La fonction $f(x,y,z) = 2xyz$ est-elle continue ? La restriction de cette fonction à l'ensemble $\{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ est-elle bornée et atteint-elle ses bornes ? Pourquoi ?